Renormierung nach Connes und Kreimer

Kai Keller

in Zusammenarbeit mit Christian Bogner

7. Februar 2007

Überblick

Motivation

Was Renormierung leisten muss...

- Die Feynmanregeln ϕ angewandt auf ein Feynmandiagramm Γ ergeben einen unter Umständen *divergenten Beitrag* ϕ_Γ zur Übergangsamplitude.

- ϕ_Γ lässt sich in *Laurentreihen* in einem bestimmten Regularisierungsparameter entwickeln.
    - Die Menge V dieser Beiträge trägt damit eine *Ringstruktur*.

- $\mathbf{R} : V \to V$, Renormierungsabbildung, erhält Singularitäten.

- Wir wollen etwas endliches bekommen:

$$\phi_\Gamma^r = \phi_\Gamma - \mathbf{R}(\phi_\Gamma)$$ richtig, aber nur für *primitive Graphen*

Überblick

Feynmangraphen und Wurzelbäume
Von den Graphen zu den Bäumen

Definitionen (nach [Kre02])

- Ein *Primitiver Graph* ist ein Feynmangraph, der keine Subdivergenzen enthält.
- Ein *Wurzelbaum (rooted tree)* ist eine Menge t von orientierten Seiten und Vertices mit folgenden Eigenschaften:
  - zusammenhängend ("aus einem Stück")
  - einfach zusammenhängend ("keine Löcher")
  - es gibt genau einen Vertex, der keine einlaufende Seite besitzt, die *Wurzel*

Überblick

Die Hopfalgebra H_R der Wurzelbäume

Wiederholung

Definition (Hopfalgebra - Wiederholung)

Eine Hopfalgebra $(H, m, E, \triangle, \overline{e}, S)$ über einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine Bialgebra mit Antipode, d.h

- (H, m, E) ist eine Algebra mit assoziativer Multiplikation $m : H \otimes H \to H$ und Eins $E : \mathbb{K} \to H$
- Komultiplikation $\triangle : H \to H \otimes H$ und Koeins $\overline{e} : H \to \mathbb{K}$ sind Algebra-Homomorphismen.
- Die Antipode $S : H \to H$ ist die Inverse der Identität id_H in der unitären Algebra der Endomorphismen $(\mathrm{End}\,(H)\,, \star, E \circ \overline{e})$:

$$S \star \mathrm{id}_H = \mathrm{id}_H \star S = E \circ \overline{e}\,.$$

Die Hopfalgebra H_R der Wurzelbäume

Multiplikation und Eins

- Multiplikation $m : H_R \otimes H_R \to H_R$:

$$\sum t \otimes t' \mapsto \sum t\, t' := \sum t \dot{\cup} t'$$

- Das neutrale Element dieser Verknüpfung ist offensichtlich die leere Menge

$$\mathbb{1}_{H_R} := \emptyset \qquad ; \qquad t \mathbb{1}_{H_R} = \mathbb{1}_{H_R} t = t \quad \forall t \in H_R$$

die Einsabbildung $E : \mathbb{K} \to H_R$ ist demnach:

$$\alpha \mapsto E(\alpha) := \alpha \mathbb{1}_{H_R}$$

$\Rightarrow$ **H_R ist kommutative Algebra mit Eins**

Die Hopfalgebra H_R der Wurzelbäume

Schnitte von Wurzelbäumen

Definition (Schnitt)

Ein Schnitt $C : H_R \to H_R$ ist eine Operation, die einem Wurzelbaum t ein Produkt $C(t)$ von disjunkten Teilbäumen zuordnet. Wir bezeichnen mit

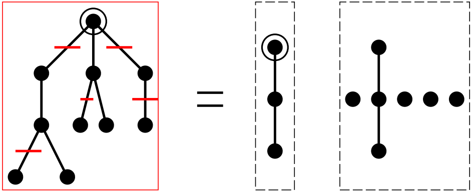
- $R^C(t)$: den Teilbaum in $C(t)$, der die Wurzel von t enthält.
- $P^C(t) = C(t) \backslash R^C(t)$ "den Rest" - die Menge der Teilbäume, die nicht die Wurzel von t enthalten.

Definition (erlaubter Schnitt - admissible cut)

Ein Schnitt $C : H_R \to H_R$ heißt *erlaubter Schnitt*, wenn er nicht leer ist, und wenn durch C jeder Pfad von jedem beliebigen Vertex zur Wurzel höchstens ein mal geschnitten wird.

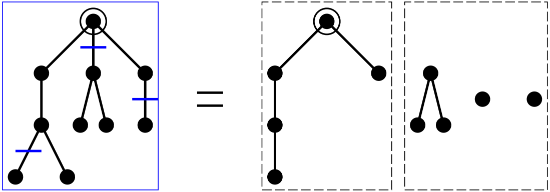
Die Hopfalgebra H_R der Wurzelbäume

Beispiel für Schnitte



$R^C(t)$ $P^C(t)$

“nicht erlaubt”



$R^C(t)$ $P^C(t)$

“erlaubt”

Die Hopfalgebra H_R der Wurzelbäume

Komultiplikation und Koeins

- Komultiplikation $\triangle : H_R \to H_R \otimes H_R$:

$$t \mapsto \triangle(t) := t \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes t + \sum_{\text{erl. Schn. } C} P^C(t) \otimes R^C(t)$$

- Koeins $\overline{e} : H_R \to \mathbb{K}$:

$$t \mapsto \overline{e}(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t \neq \mathbb{1} \\ 1 & \text{falls } t = \mathbb{1} \end{cases}$$

$\boxed{\Rightarrow H_R \text{ ist kommutative, nicht kokommutative Bialgebra}}$

Die Hopfalgebra H_R der Wurzelbäume

Antipode

- Antipode $S : H_R \to H_R$ (rekursive Definition)

$$
\begin{aligned}
S(\mathbb{1}) &= \mathbb{1} \\
S(t_1 \dots t_n) &= S(t_1) \dots S(t_n) \\
S(t) &= -t - \sum_{\text{erl. Schn. } C} S\left[P^C(t)\right] R^C(t)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ H_R ist kommutative, nicht kokommutative Hopfalgebra

Überblick

Antipode und Renormierung
Charaktere - die Feynmanregeln

- Die Feynmanregeln für Wurzelbäume werden durch Charaktere $\phi : H_R \to V$ realisiert.
- Die *Algebrastruktur* in $(\mathrm{End}\,(H_R)\,,\star)$ induziert auf kanonische Weise eine *Gruppenstruktur* in $\mathrm{Char}\,(H_R, V)$
  - mit dem *Produkt*: $\phi \tilde{\star} \psi := m_V \circ (\phi \otimes \psi) \circ \triangle$
  - der *Eins*: $\eta = \phi \circ E \circ \bar{e}$
  - und dem *Inversen*: $\phi^{-1} = \phi \circ S$

Antipode und Renormierung
Renormierungsabbildung

- Nach der Definition der Koeins ist

$$(S \star \mathrm{id}_{H_R})(t) = E \circ \overline{e}(t) = 0 \quad \text{für alle nichttrivialen } t \in H_R\,.$$

- Definiere speziellen Charakter $S_{\mathbf{R}} : H_R \to V$ durch[1]

$$S_{\mathbf{R}}(t) := -\mathbf{R}\left[\phi(t) + \sum_{\text{erl. Schn. } C} S_{\mathbf{R}}\left(P^C(t)\right)\phi\left(R^C(t)\right)\right]$$

- Dann gilt wegen $S_{\mathrm{id}_V} = \phi \circ S$

$$S_{\mathrm{id}_V} \tilde{\star} \phi = (\phi \circ S)\,\tilde{\star}\phi = \phi^{-1}\tilde{\star}\phi = \eta$$

[1] Damit $S_{\mathbf{R}}$ tatsächlich ein Charakter ist, muss $\mathbf{R}$ eine Rota-Baxter-Bedingung erfüllen:

$$\mathbf{R}(ab) + \mathbf{R}(a)\,\mathbf{R}(b) = \mathbf{R}(\mathbf{R}(a)\,b) + \mathbf{R}(a\mathbf{R}(b))\,.$$

Antipode und Renormierung
Wohin die Unendlichkeiten verschwinden...

$$\boxed{S_{\mathrm{id}_V} \tilde{\star} \phi = \eta = \phi \circ E \circ \bar{e}}$$

- $(S_{\mathrm{id}_V} \tilde{\star} \phi)(t) = 0$ für nichttriviale Wurzelbäume t.
- Zu $(S_{\mathbf{R}} \tilde{\star} \phi)(t)$ tragen solche Bereiche nicht bei, für die $\mathbf{R} = \mathrm{id}_V$ gilt.
- $\mathbf{R}$ wirkt trivial auf Singularitäten.

$\Rightarrow$ **Singularitäten in t tragen zu $(S_{\mathbf{R}} \tilde{\star} \phi)(t)$ nicht bei.**

Überblick

Zusammenfassung

- Der Renormierung liegt eine Hopfalgebra-Struktur zu Grunde die Hopfalgebra der Wurzelbäume.
- Diese Hopfalgebra-Struktur ist unabhängig von der beschreibenden physikalischen Theorie, d.h. den Feynmanregeln.
- Die Hopfalgebra (speziell: Antipode) sagt uns, wie wir die Verschachtelung der Subdivergenzen eines Feynmangraphen bei der Renormierung berücksichtigen müssen.

Literaturliste

Alain Connes und Dirk Kreimer.
Hopf Algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry.
Communications in Mathematical Physics, 199:203–242, 1998.

Dirk Kreimer.
On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories.
Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 2:303–334, 1998.

Dirk Kreimer.
Combinatorics of (perturbative) quantum field theory.
Physics Reports, 363:387–424, 2002.

Dieser Vortrag: `wwwthep.physik.uni-mainz.de/~keller/`