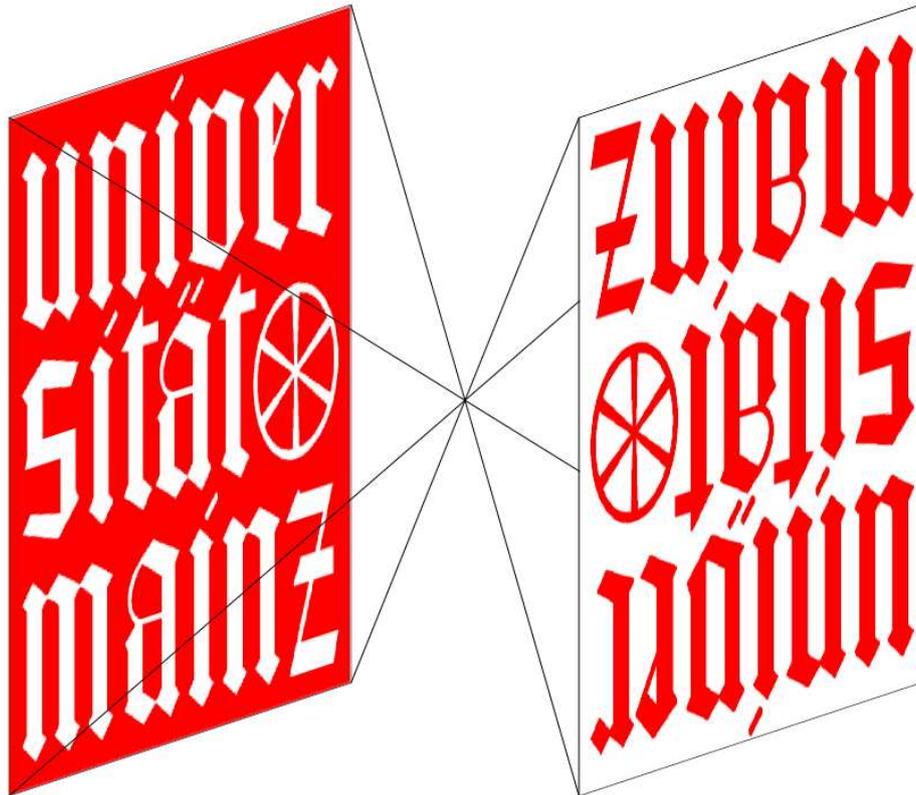


Über die Rolle der Projektiven Geometrie in der Quantenmechanik



Diplomarbeit am Institut für Physik der
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

vorgelegt am 16. Oktober 2006

von

Kai Johannes Keller

Erster Gutachter und Betreuer der Arbeit: Prof. Dr. Nikolaos Papadopoulos
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Florian Scheck

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
Teil 1. Der projektive Hilbertraum und die Realisierung von Symmetrien	9
Motivation	11
Kapitel I. Die projektive Geometrie und ihr Hauptsatz	13
1. Grundlegende Definitionen	13
2. Der Hauptsatz in der Projektiven Ebene	19
3. Der Hauptsatz der projektiven Geometrie	25
4. Strukturgruppe projektiver Räume	34
Kapitel II. Physikalische Zustände und projektiver Hilbertraum	35
1. Zustand, Observable und physikalisches System	35
2. Die Axiome der Quantenmechanik	35
3. Besonderheiten des quantenmechanischen Zustandsbegriffs	36
4. Der Hilbertraum und der Raum der Zustände	37
Kapitel III. Symmetrien	43
1. Grundlegende Definitionen und Gruppenstruktur	43
2. Strukturgruppe des projektiven Hilbertraums	45
3. Konsequenzen auf dem Raum der Repräsentanten	45
4. Das Wigner-Theorem	50
Kapitel IV. Beweis des Wigner-Theorems nach Weinberg	51
1. Vorbemerkungen	51
2. Konstruktion nach Weinberg	54
Kapitel V. Beweis des Theorems nach Bargmann	63
1. Vorbemerkungen	63
2. Konstruktion nach Bargmann	67
3. Vergleich der Beweise	71
Kapitel VI. Wigner-Theorem und Hauptsatz der projektiven Geometrie	73
1. Der Kollineationssatz und die Invarianz der \mathcal{PH} -Struktur	73
2. Verallgemeinerung des Hauptsatzes	75
Anhang A. Kohomologie von Gruppen	81
Anhang B. Rechnungen	85
Anhang C. Die Indikatorfunktionen von Bargmann und Weinberg	87

Teil 2. Identische Teilchen	89
Motivation	91
Kapitel VII. Der Hilbertraum für zwei identische Teilchen in \mathbb{R}^3	95
1. Schnitte, Repräsentanten und $U(1)$ -Vektorbündel	95
2. Konfigurationsraum für zwei identische Teilchen	97
3. Die kartesischen Karten des $\mathbb{R}P^2$	98
4. Ein Maß für $\mathbb{R}P^2$	99
5. Zwei Vektorbündel über $\mathbb{R}P^2$	102
6. Zwei Hilberträume	105
Kapitel VIII. Drehungen auf $\mathbb{R}P^2$	107
1. Die Wirkung der $SU(2)$ auf \mathbb{R}^3	107
2. Induzierte Wirkung auf $\mathbb{R}P^2$	109
Kapitel IX. Lift der $SU(2)$ -Wirkung	115
1. Hochhebung einer Gruppenwirkung	115
2. Eine einfache Hochhebung der $SU(2)$ -Wirkung	118
Anhang D. Assoziiertes Bündel und äquivariante Funktionen	123
Anhang E. L_- als komplex- <i>tautologisches</i> Bündel über $\mathbb{R}P^2$	127
1. Das neutrale Element in $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2)$	127
2. Das komplex- <i>tautologische</i> Bündel	128
Zusammenfassung und Ausblick	133
Notation	135
Literaturverzeichnis	137
Danksagung	139

Einleitung

Die projektive Geometrie ist ein Teilgebiet der Mathematik, deren Anwendbarkeit auf die Physik während des Physikstudiums wenn überhaupt nur am Rande erwähnt wird. Dabei ist es gerade der enge Zusammenhang zwischen der projektive Geometrie und dem Raum der Zustände, der in der Quantenmechanik so fundamentale Sätze wie das Wigner-Theorem (vgl. Teil 1) zur Folge hat. Auch bei der Untersuchung des Spin-Statistik-Zusammenhangs spielt die projektive Geometrie eine wichtige Rolle. Ein weiteres wichtiges Ergebnis, dessen Beziehung zur projektiven Geometrie wir in Teil 2 der Arbeit beleuchten, ist nämlich die Fermi-Bose-Alternative.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit zwei Teilgebieten der Quantenmechanik, in denen die projektive Geometrie von grundlegender Bedeutung ist. Das erste Gebiet ist die Realisierung von Symmetrien. Hier wird der projektive Charakter des Zustandsraums analysiert. Es werden die Konsequenzen für die Realisierung von Symmetrien auf dem linearen Hilbertraum der Repräsentanten von Zuständen aufgezeigt. Zwei wesentliche Ergebnisse des ersten Teils sind eine hinreichende Bedingung für das Verschwinden projektiver Phasen, die bei solchen Realisierungen durchaus auftreten können, sowie ein kurzer und geometrisch anschaulicher Beweis des Wigner-Theorems, der den Hauptsatz der projektiven Geometrie ausnutzt.

Im zweiten Teil der Arbeit geht es um die Geometrie der Beschreibung von identischen Teilchen, dort tritt die projektive Geometrie zwar auf ganz andere aber dennoch sehr konkrete Weise in Erscheinung. Der Konfigurationsraum zweier identischer Teilchen ist nämlich gerade die reelle projektive Ebene. Wir werden zeigen, wie aus dieser Tatsache bereits die Fermi-Bose-Alternative folgt. Desweiteren werden wir die Geometrie für die Darstellung der $SU(2)$ auf den Hilberträumen zu Bose- bzw. Fermi-Statistik entwickeln.

Für eine detailliertere Einführung in die jeweiligen Themengebiete sei auf die Motivation jeweils zu Anfang eines Teils hingewiesen.

Teil 1

Der projektive Hilbertraum und die Realisierung von Symmetrien

Motivation

In diesem ersten Teil der Diplomarbeit geht es um die Realisierung von Symmetrien (Gruppenwirkungen) auf dem Raum der quantenmechanischen Zustände und um ihren Zusammenhang mit der projektiven Geometrie. Zentral bei der Realisierung von Symmetrien ist dabei das bereits 1931 von Eugen Wigner vorgestellte und bewiesene Theorem, das besagt, dass beliebige Symmetrietransformationen, also Transformationen von Zuständen, die die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den Zuständen respektieren, auf \mathcal{H} als unitäre oder antiunitäre Operatoren dargestellt werden können [Wig31]. Der Originalbeweis von Wigner wurde in den letzten 75 Jahren natürlich vielfach wiederholt, und die kleine Lücke, die der Beweis von 1931 aufweist, wurde mehr als einmal geschlossen [Bar64],[Wei95b]. Es ist nun auch schon seit längerem die Beziehung dieses Beweises zur projektiven Geometrie bekannt [Uhl62],[LM63]. Allerdings gehen die meisten Beweise einen konstruktiven Weg über bestimmte Äquivalenzklassen in \mathcal{H} , die nicht immer Zuständen entsprechen (vgl. [Bar64]) und machen den deduktiven Weg über die Strukturgruppen der zu Grunde liegenden Räume nicht sehr deutlich. Ich werde in meiner Arbeit diese Rolle der Strukturgruppen betonen und stelle dabei den bekannten Beweisen des Wigner-Theorems einen Beweis gegenüber, der auf einer Analyse der Gruppe der *quasiunitären Abbildungen*, der *Symmetrietransformationen*, bzw. der *Strukturgruppe des projektiven Hilbertraumes* beruht. Wir werden im verlaufe dieser Arbeit verstehen, dass es sich bei diesen drei Begriffen um ein und die selbe Sache handelt.

In Kapitel I dieses ersten Teils werden wir eine Einführung in die Grundlagen der projektiven Geometrie geben. Die Begriffe, die dort entwickelt werden, sind wesentlich für die gesamte Arbeit. Im zweiten Kapitel werden wir die Struktur des der Quantenmechanik zu Grunde liegenden Zustandsraums, des *projektiven Hilbertraums* beleuchten. Einige Konsequenzen aus dieser Struktur für die Realisierung von Symmetrien (wie das Auftreten von *projektiven Phasen*) werden in Kapitel III behandelt. Kapitel IV und V widmen wir dann zwei "klassischen" Beweisen des Wigner-Theorems und dem Vergleich dieser Beweise mit einem Beweis des Hauptsatzes der projektiven Geometrie [Art57]. Im letzten Kapitel VI dieses ersten Teils werden wir dann klar stellen, dass das Wigner-Theorem letztlich eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der projektiven Geometrie auf projektive Hilberträume ist. Wie bereits erwähnt, wird diese Feststellung dabei durch die Analyse der Strukturgruppe des projektiven Hilbertraums \mathcal{PH} , die Gruppe der quasiunitären Kollineationen, motiviert. Dass diese Gruppe gerade die Symmetrietransformationen auf \mathcal{PH} sind, ist von zentraler Bedeutung für diese Arbeit.

Die projektive Geometrie und ihr Hauptsatz

Dieses erste Kapitel dient der Einführung der grundlegenden mathematischen Begriffe sowie dem Beweis und dem geometrischen Verständnis des Hauptsatzes der projektiven Geometrie. Wir orientieren uns dabei zu weiten Teilen an der Darstellung des Themengebietes in dem Buch von Gerd Fischer [Fis92], der bei dem Beweis des Hauptsatzes auf den Beweis von Emil Artin [Art57] zurückgreift. Für ein mehr anschauliches und analytisches Verständnis der projektiven Geometrie sei aber auch auf die richtungsweisende Arbeit von Felix Klein [Kle25] hingewiesen.

Nach der Definition der grundlegenden Begriffe, die in verschiedenen Beispielen im ersten Abschnitt veranschaulicht werden, geben wir im zweiten Abschnitt einen geometrischen Beweis des Hauptsatzes der projektiven Geometrie für die reelle projektive Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}P^2$ wieder, der auf eine Konstruktion von August Ferdinand Möbius zurückgeht. Im dritten Abschnitt beweisen wir schließlich den Hauptsatz der projektiven Geometrie für projektive Räume beliebiger, endlicher Dimension, indem wir in vielen Zeichnungen und mit Hilfe geometrischer Überlegungen den algebraischen Beweis von Emil Artin [Art57] beleuchten. Im letzten Abschnitt machen wir dann noch einige Bemerkungen zu der Strukturgruppe projektiver Räume. Auf die Begriffe, die in diesem Kapitel entwickelt werden, wird in den folgenden Kapiteln, vor allem bei der Erläuterung des Zusammenhangs zur Quantenmechanik immer wieder zurückgegriffen.

1. Grundlegende Definitionen

Sei V ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} . Dann wird durch

$$(1) \quad v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^\times : v = \lambda w \quad (v, w \in V)$$

eine Äquivalenzrelation auf V definiert. Den Quotientenraum $\mathcal{P}V := (V \setminus \{0\}) / \sim$ nennt man den *projektiven Raum* zu V .¹

DEFINITION I.1 (Projektiver Raum). Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum, dann nennt man die Menge aller Ursprungsgeraden in V den projektiven Raum zu V :

$$\mathcal{P}V = \{[v] : v \in V\} .$$

Auf natürliche Weise ist dann

$$\dim \mathcal{P}V = \dim V - 1 .$$

Wir bezeichnen, wie in der projektiven Geometrie üblich, die Äquivalenzklassen

$$[v] = \{v' \in V : v' = \lambda v, \lambda \in \mathbb{K}^\times\}$$

der Relation (1) als *Strahlen*. Dieser Begriff ist etwas vielleicht etwas irreführend, da man mit Strahlen in der elementaren Geometrie Linien mit festem Anfangs und ohne Endpunkt meint.

¹ \mathbb{K}^\times bezeichnet die Einheitengruppe zu \mathbb{K} . Das sind all die Elemente in \mathbb{K} , die ein multiplikatives Inverses besitzen. Da \mathbb{K} ein Körper ist, ist sie gleich dem Körper ohne die Null.

In der projektiven Geometrie ist diese Nomenklatur aber üblich, und so werden wir die obigen Äquivalenzklassen, also die Ursprungsgeraden (ohne den Nullpunkt), als Strahlen bezeichnen. Auf der anderen Seite ist die Interpretation als Ursprungsgerade, wie wir gleich in Abschnitt 1.1 sehen werden, nicht ausgezeichnet. Strahlen haben viele mathematische "Gesichter". Sie sind eindimensionale Unterräume, Äquivalenzklassen einer bestimmten Relation aber auch Orbits einer Gruppe, hier z.B. der multiplikativen Gruppe \mathbb{K}^\times auf V , insbesondere sind sie aber Punkte des projektiven Raumes.

Nun definiert offensichtlich jeder Vektor $v \neq 0$ in V in eindeutiger Weise einen Strahl in $\mathcal{P}V$, und wie oben gesehen entspricht jedem Strahl eine ganze Äquivalenzklasse von Vektoren in V . Wir haben also eine kanonische, surjektive Abbildung

$$\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{P}V,$$

die wir *Zentralprojektion* oder kurz *Projektion* nennen.

Hat man eine Basis des Vektorraums V vorgegeben, wie z.B. im Fall $V = \mathbb{R}^{n+1}$ die kanonische Basis, so lassen sich so genannte *homogene Koordinaten* einführen. Wir schreiben für den projektiven Punkt $\mathbf{x} = [x] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \equiv \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, der durch den Vektor $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ bestimmt wird:²

$$\mathbf{x} = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n].$$

Auf ihn wird die gesamte Ursprungsgerade durch den Punkt $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ projiziert. Da es zum Nullvektor $0 \in V$ keinen Strahl in $\mathcal{P}V$ gibt, können die homogenen Koordinaten eines projektiven Punktes offensichtlich nicht alle gleichzeitig verschwinden.

1.1. Geometrische Struktur projektiver Räume. Bevor wir uns mit den Eigenschaften projektiver Punkte und den projektiven Abbildungen beschäftigen, wollen wir uns eine Idee vom Aussehen projektiver Räume machen. Wir betrachten dazu die oben definierte Zentralprojektion $\pi : V \rightarrow \mathcal{P}V$ etwas genauer. Der Anschaulichkeit wegen legen wir zunächst den reellen Vektorraum \mathbb{R}^{n+1} zu Grunde. Es ist also

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$$

eine surjektive Abbildung. Die Faser eines Punktes $\mathbf{a} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, d.h. die Menge aller Punkte $a' \in \mathbb{R}^{n+1}$, die unter π auf \mathbf{a} abgebildet werden, ist, wie wir bereits wissen, eine Ursprungsgerade deren Richtung durch einen Vektor $a \in \pi^{-1}(\mathbf{a}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ festgelegt ist:³

$$\pi^{-1}(\mathbf{a}) = \{a' \in \mathbb{R}^{n+1} : a' = \lambda a, \lambda \in \mathbb{R}^\times\}.$$

Nun bleibt π surjektiv, wenn wir sie auf die Einheitskugel $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ einschränken

$$\pi|_{S^n} : S^n \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}).$$

Die Faser des Punktes $\mathbf{a} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ wird dadurch natürlich auch eingeschränkt, denn für die Urbilder muss nun $\|a\| = 1$ gelten, und somit ist:

$$(\pi|_{S^n})^{-1}(\mathbf{a}) = \{a' \in \mathbb{R}^{n+1} : a' = \lambda a, \lambda \in \{+1, -1\}, \|a\| = 1\}.$$

²In der Literatur findet man, insbesondere für $n = 2$, häufig auch die Notation $\mathbb{R}P^n \equiv \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

³Wir wollen hier bei der Einführung in die projektive Geometrie die projektiven Punkte $\mathbf{a} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ klar von den Ursprungsgeraden $\pi^{-1}(\mathbf{a}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ trennen, werden später aber durchaus Schreibweisen wie $a \in \mathbf{a}$ zulassen, gemeint ist dann immer ein so genannter Repräsentant $a \in \pi^{-1}(\mathbf{a}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$; mit $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ der entsprechenden Zentralprojektion.

Wir können aus π also eine bijektive Abbildung machen, indem wir auf der S^n die Antipoden $\{-a, +a\}$ identifizieren. Wir schreiben⁴ $\bar{S}^n = S^n / \{+1, -1\} = S^n / \mathbb{Z}_2$, und erhalten den Homöomorphismus:

$$\pi|_{\bar{S}^n} : \bar{S}^n \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) .$$

Der reelle projektive Raum $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ ist demnach homöomorph zu S^n / \mathbb{Z}_2 :

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \approx S^n / \mathbb{Z}_2 .$$

Durch diese Konstruktion wird, neben der nicht trivialen topologischen Struktur projektiver Räume, auch die Korrespondenz zwischen den Punkten des projektiven Raums $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ und den normierten Vektoren des zugehörigen Vektorraums \mathbb{R}^{n+1} sichtbar.

BEISPIEL. Ein bekanntes Beispiel für einen reellen projektiven Raum ist $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \text{SO}(3)$, die Drehgruppe in 3 Dimensionen. Bekanntermaßen ist schließlich

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3) \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Gruppen,⁵ und demnach:

$$\text{SO}(3) = \text{SU}(2) / \mathbb{Z}_2 = S^3 / \mathbb{Z}_2 = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) .$$

Wir wollen nun die obige Konstruktion auf den komplexen Vektorraum \mathbb{C}^{n+1} übertragen.

Es sei also:

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$$

die zu betrachtende Projektion. Die Faser eines Punktes $\mathbf{a} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ ist dann:

$$\pi^{-1}(\mathbf{a}) = \{a' \in \mathbb{C}^{n+1} : a' = \lambda a, \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$$

mit einem beliebigen Repräsentanten $a \in \pi^{-1}(\mathbf{a})$. Das ist ein \mathbb{C}^\times -Orbit auf \mathbb{C}^{n+1} .

Analog zu der Vorgehensweise oben wollen wir den Definitionsbereich von π auch im komplexen Fall so einschränken, dass wir eine bijektive Abbildung (Homöomorphismus) erhalten. Nun ist $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$, das heißt wir können die S^{2n+1} in den \mathbb{C}^{n+1} einbetten; wir schreiben $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ in der kanonischen Basis $a = (a_0, \dots, a_n)$ und erhalten:

$$S^{2n+1} = \left\{ a \in \mathbb{C}^{n+1} : |a_0|^2 + \dots + |a_n|^2 = 1 \right\} ,$$

also die Menge der normierten Vektoren des \mathbb{C}^{n+1} . Die Einschränkung

$$\pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$$

liefert die Faser:

$$\left(\pi|_{S^{2n+1}}\right)^{-1}(\mathbf{a}) = \{a' \in \mathbb{C}^{n+1} : a' = \lambda a, |\lambda| = 1, \|a\| = 1\} .$$

⁴Die multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$ ist über

$$\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 0 \\ -1 & \mapsto & 1 \end{array}$$

isomorph zu der additiven Gruppe $\mathbb{Z} \bmod 2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$, die aber im Gegensatz zu \mathbb{Z}_2 auch einen Körper bildet.

⁵Diese kurze exakte Sequenz bringt zum Ausdruck, dass $\text{SU}(2)$ eine Überlagerungsgruppe von $\text{SO}(3)$ ist. Da die Parameternigfaltigkeit S^3 der Liegruppe $\text{SU}(2)$ einfach zusammenhängend ist, ist $\text{SU}(2)$ sogar die universelle Überlagerung von $\text{SO}(3)$. Man liest demnach ab, dass $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$ isomorph zur ersten Fundamentalgruppe $\pi_1(\text{SO}(3))$ ist, die Liegruppe $\text{SO}(3)$ ist also zweifach zusammenhängend.

Um nun auch hier eine Bijektion zu erhalten, müssen wir nicht nur Antipoden, sondern alle Vektoren, die sich um einen Phasenfaktor $\lambda \in U(1)$ unterscheiden, identifizieren.⁶ Wir schreiben $\tilde{S}^{2n} = S^{2n+1}/U(1)$ und erhalten wieder einen Homöomorphismus:

$$\pi|_{\tilde{S}^{2n}} : \tilde{S}^{2n} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) ,$$

und somit

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \approx S^{2n+1}/U(1) .$$

Was bei der Verallgemeinerung auf einen komplexen Vektorraum (im Vergleich zum Reellen) hinzu kommt, ist also, dass Elemente, die sich in \mathbb{C}^{n+1} nur um einen Phasenfaktor $\lambda \in U(1)$ unterscheiden, in $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ nicht unterschieden werden. Es reicht aber offensichtlich auch im Komplexen aus, die normierten Vektoren in \mathbb{C}^{n+1} zu betrachten.

1.2. Eigenschaften projektiver Punkte. Nachdem wir nun eine gewisse geometrische Vorstellung davon haben, wie ein projektiver Raum aussieht, wollen wir uns mit den Eigenschaften beschäftigen, die man Strahlen oder projektiven Punkten zuweisen kann.

DEFINITION I.2 (projektive Unabhängigkeit). Sei I eine abzählbare Indexmenge. Eine Menge von projektiven Punkten $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in I}$, $\mathbf{v}_i \in \mathcal{P}V$ heißt *projektive unabhängig*, falls es in V ein System linear unabhängiger Vektoren $\{v_i\}_{i \in I}$ gibt, sodass

$$v_i \in \mathbf{v}_i \quad \forall i \in I .$$

Ein System von Strahlen, das nicht projektive unabhängig ist, heißt *projektive abhängig*.

BEMERKUNG. Ist ein System projektive unabhängiger Strahlen $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in I}$ gegeben, so ist natürlich jedes System $\{v_i\}_{i \in I}$ mit $v_i \in \mathbf{v}_i$ linear unabhängig.

DEFINITION I.3 (projektive Basis). In einem projektiven Raum $\mathcal{P}V$ der Dimension $\dim \mathcal{P}V = n$ bilden $n + 2$ projektive Punkte genau dann eine *projektive Basis*, wenn jeweils $n + 1$ von ihnen projektive unabhängig sind.

BEMERKUNG. So wie die Vektorraum-Basen in der linearen Algebra eine lineare Abbildung eindeutig festlegen, und in der affinen Geometrie eine affine Abbildung durch das Bild einer affinen Basis bestimmt ist, legt die projektive Basis, wie wir später noch sehen werden, die strukturerhaltenden Abbildungen der projektiven Geometrie, die projektiven Abbildungen, eindeutig fest.

Zwei Strahlen $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{P}V$ sind immer entweder projektive unabhängig oder gleich. Im ersten Fall legen beide zusammen eine *projektive Gerade* in $\mathcal{P}V$ fest, die wir mit $\mathbf{v} \vee \mathbf{w}$ bezeichnen. In V entspricht dieser projektiven Geraden die Ebene:⁷

$$\mathbf{v} \vee \mathbf{w} = \{v + w : v \in \mathbf{v}, w \in \mathbf{w}\} .$$

Wir verwenden hierfür auch oft den Begriff *Bündelebene*. Diese Namensgebung sollte in folgendem Beispiel anschaulich werden.

⁶Die $U(1)$ -Orbits auf der Menge der normierten Vektoren sind natürlich den \mathbb{C}^\times -Orbits auf der selben Menge gleich.

⁷Wie bereits oben angesprochen, unterdrücken wir hier und im Folgenden die Angabe der Zentralprojektion π . Die selbe Gleichung mit Angabe der Zentralprojektion würde lauten:

$$\mathbf{v} \vee \mathbf{w} = \pi(\{v + w : v \in \pi^{-1}(\mathbf{v}), w \in \pi^{-1}(\mathbf{w})\}) .$$

BEISPIEL. In zwei projektiven Dimensionen können wir uns das Wesen projektiver Räume und Geraden anhand der Abbildung 1 verdeutlichen. Nehmen wir als Vektorraum den \mathbb{R}^3 mit Koordinaten (x, y, z) , dann hat jede Ursprungsgerade $a = [a : b : c]$ des \mathbb{R}^3 genau einen Durchstoßpunkt durch eine zur (x, y) -Ebene parallele Ebene, nehmen wir o.B.d.A. die Ebene $z = 1$. Eine Ausnahme bilden die Ursprungsgeraden, die in der $(z = 0)$ -Ebene liegen, sie haben keinen gemeinsamen Punkt mit der Ebene $z = 1$. Nehmen wir uns nun aber einen Strahl (=Bündelgerade) $[a : b : c]$, der einen gemeinsamen Punkt mit der $(z = 1)$ -Ebene hat, und nähern wir uns mit diesem Strahl der Ebene $z = 0$ (also $c \rightarrow 0$), so wird die entsprechende Bündelgerade offensichtlich immer flacher und der Durchstoßpunkt auf der $(z = 1)$ -Ebene E entflieht ins Unendliche. Wegen dieser Eigenschaft wird hier die (x, y) -Ebene auch als *Fluchtebene* oder - projektiv gesprochen - "unendlich ferne Gerade" bezeichnet. Damit haben wir eine Interpretation für die Ursprungsgeraden, die in der Ebene $z = 0$ liegen, sie entsprechen gerade den unendlich fernen Punkten der Kartenebene E .

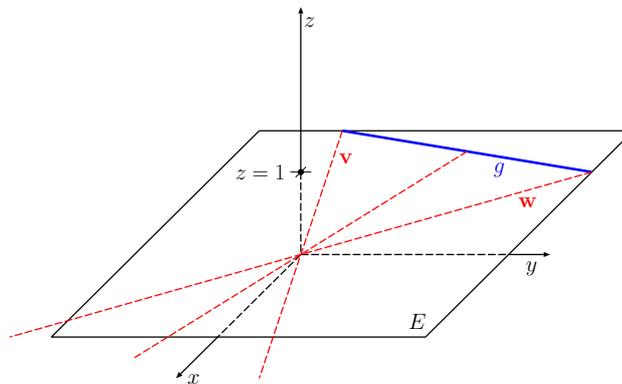


ABBILDUNG 1. Kartenebene E und projektive Gerade g

Auch die projektiven Geraden erhalten hier eine gewisse Anschaulichkeit. Zumindest im Endlichen können wir sie als die Schnittgeraden der durch zwei projektiv unabhängige Punkte aufgespannten Bündel Ebene mit der (frei gewählten) Ebene E betrachten (siehe noch einmal Abbildung 1). Zu bemerken ist dabei noch, dass die Wahl der Ebene E festlegt, was wir unter der "unendlich fernen Geraden" verstehen. Die projektiven Punkte der "unendlich fernen Gerade zu E " sind immer genau die Strahlen, die in der zu E parallelen Ebene durch den Ursprung liegen. Wählen wir für E also beispielsweise die Ebene $x = 1$, so ist die unendlich ferne Gerade durch die Fluchtebene $x = 0$ festgelegt. Was wir also konkret als die "unendlich ferne Gerade" bezeichnen ist reine Konvention und hängt insbesondere von der Wahl der Ebene E ab. Im Projektiven gibt es den Begriff des Unendlichen also eigentlich gar nicht. Was die Fluchtebene $z = 0$ zur "unendlich fernen Gerade" macht ist lediglich unsere affine Beschreibungsweise. Nichts desto trotz ermöglicht uns dieses affine Bild der projektiven Ebene eine gewisse geometrische Anschauung, die auch die folgende Definition verständlicher macht.⁸

⁸Ein konkretes Beispiel für die Anwendung der hier vorgestellten Sichtweise, ist die Konstruktion eines differenzierbaren Atlas für die projektive Ebene $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}P^2$, den wir aber erst im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit benötigen (vgl. Abschnitt VII.3).

DEFINITION I.4 (kollinear). Drei oder mehr verschiedene projektive Punkte $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{P}V$, die auf der selben projektiven Geraden liegen, heißen *kollinear*. Es gilt dann offensichtlich

$$\mathbf{v}_i \vee \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_k \vee \mathbf{v}_l \quad \forall i, j, k, l \in \{1, \dots, n\} .$$

1.3. Abbildungen zwischen projektiven Räumen.

DEFINITION I.5 (Kollineation). Eine bijektive Abbildung $\mathbf{K} : \mathcal{P}V \rightarrow \mathcal{P}W$ heißt Kollineation, falls sie kollineare Punkte auf kollineare Punkte abbildet, d.h.

$$\mathbf{K}(\mathbf{v} \vee \mathbf{w}) = \mathbf{K}\mathbf{v} \vee \mathbf{K}\mathbf{w} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{P}V .$$

BEMERKUNG I.6. Die Umkehrung \mathbf{K}^{-1} einer Kollineation \mathbf{K} ist wieder eine Kollineation. Wegen der Surjektivität von \mathbf{K} kann man beliebige Strahlen $\mathbf{v}' \in \mathcal{P}W$ schreiben als:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{K}\mathbf{v}$$

mit einem $\mathbf{v} \in \mathcal{P}V$. Seien also o.B.d.A. \mathbf{v}' und \mathbf{w}' die Bilder von \mathbf{v} und \mathbf{w} unter \mathbf{K} , dann gilt:

$$\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{v}' \vee \mathbf{w}') = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{K}\mathbf{v} \vee \mathbf{K}\mathbf{w}) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}(\mathbf{v} \vee \mathbf{w}) = \mathbf{v} \vee \mathbf{w} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{v}' \vee \mathbf{K}^{-1}\mathbf{w}' .$$

DEFINITION I.7 (projektive Abbildung). Eine Abbildung $\mathbf{P} : \mathcal{P}V \rightarrow \mathcal{P}W$ heißt *projektiv*, falls es eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ gibt, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{P}V & \xrightarrow{\mathbf{P}} & \mathcal{P}W \end{array}$$

das heißt:

$$\mathbf{P}[v] = [Lv] .$$

Wir nennen in diesem Fall die Abbildung L *kompatibel* zu \mathbf{P} .

Ist speziell $\dim \mathcal{P}V = \dim \mathcal{P}W$ und die Abbildung $\mathbf{P} : \mathcal{P}V \rightarrow \mathcal{P}W$ zusätzlich bijektiv, so nennt man \mathbf{P} eine *Projektivität*.

Falls der den betrachteten Vektorräumen zu Grunde liegende Körper \mathbb{K} andere Körperautomorphismen außer der Identität zulässt, so wird aus linearen Abbildung L in der obigen Definition eine *bis auf Körperautomorphismus* lineare Abbildung. Für uns besonders wichtig ist der Spezialfall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Auf \mathbb{C} gibt es nun zwei Körperautomorphismen, die Identität und die komplexe Konjugation, d.h. auf \mathbb{C} tauchen neben den linearen auch antilineare Abbildungen auf. Wir fassen hier und im Folgenden diese Begriffe unter dem Oberbegriff *Semilinearität* zusammen:

DEFINITION I.8 (semilinear). Sei \mathbb{K} ein Körper mit Körperautomorphismus $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, seien ferner V und W Vektorräume über \mathbb{K} . Dann nennt man eine Abbildung $S : V \rightarrow W$ genau dann *semilinear*, falls

$$S(\alpha v + \beta w) = \sigma(\alpha) S v + \sigma(\beta) S w \quad \forall v, w \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} .$$

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nennen wir S *linear*, falls $\sigma = \text{id}$ und *antilinear*, falls $\sigma = \overline{\text{id}}$.

Damit haben wir dann auch die folgende Verallgemeinerung der projektiven Abbildung:

DEFINITION I.9 (semiprojektive Abbildung). Eine Abbildung $\mathbf{S} : \mathcal{P}V \rightarrow \mathcal{P}W$ heißt *semiprojektiv*, falls es eine semilineare Abbildung $S : V \rightarrow W$ gibt, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{S} & W \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{P}V & \xrightarrow{\mathbf{S}} & \mathcal{P}W \end{array}$$

das heißt

$$\mathbf{S}[v] = [Sv].$$

Ist $\mathbf{S} : \mathcal{P}V \rightarrow \mathcal{P}W$ bijektiv, so heißt \mathbf{S} eine *Semiprojektivität*. Insbesondere gilt in diesem Fall natürlich auch $\dim \mathcal{P}V = \dim \mathcal{P}W$.

BEMERKUNG. Da die Identität $\text{id} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ein Körperautomorphismus ist, ist jede lineare Abbildung natürlich auch semilinear und damit jede Projektivität natürlich auch eine Semiprojektivität.

Den beiden letzten Definitionen zu Folge liegt einer Semiprojektivität also eine semilineare Abbildung zu Grunde. Demnach respektieren Semiprojektivitäten also beliebige Unterräume in den entsprechenden Vektorräumen. Insbesondere werden die durch Strahlen aufgespannten Bündelebenen auf Bündelebenen abgebildet. Im projektiven Sinne entsprechen diesen Bündelebenen, wie oben bereits diskutiert, projektive Geraden, die dann auch ihre Gestalt unter einer Semiprojektivität nicht ändern. Es werden unter Semiprojektivitäten also projektive Geraden auf projektive Geraden abgebildet, und wir erhalten folgende

FESTSTELLUNG I.10. *Jede Semiprojektivität ist auch eine stetige Kollineation.*

Die Umkehrung dieser Feststellung ist alles andere als trivial. Sie ist Gegenstand des Hauptsatzes der projektiven Geometrie, mit dessen Beweis wir uns in den Folgenden Abschnitten beschäftigen.

2. Der Hauptsatz in der Projektiven Ebene

Der Hauptsatz der projektiven Geometrie bildet die Umkehrung der Feststellung I.10. Um eine geometrische Anschauung zu erlangen beweisen wir den Satz aber zunächst nur für die reelle projektive Ebene.

THEOREM I.11 (Hauptsatz der projektiven Geometrie für die reelle projektive Ebene). *Jede stetige Kollineation zwischen reellen, projektiven Ebenen, d.h. jede stetige, bijektive Abbildung, die projektive Geraden auf projektive Geraden abbildet, ist eine Projektivität.*

Wir orientieren unsere Ausführungen an einem auf Möbius zurückgehenden Beweis, wie er beispielsweise von Felix Klein in [Kle25, S. 96 ff] präsentiert wird.

BEWEIS. Die Idee des Beweises ist wie folgt. Entnehmen wir dem Definitionsbereich einer Kollineation \mathbf{K} die vier Punkte einer projektiven Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, bezeichne ferner $\{\mathbf{K}\mathbf{v}_1, \mathbf{K}\mathbf{v}_2, \mathbf{K}\mathbf{v}_3, \mathbf{K}\mathbf{v}_4\}$ die entsprechenden Bildpunkte. Dann zeigen wir unter (i), dass es zu diesen vier Punkten eine Projektivität \mathbf{P} mit den selben Bildpunkten gibt,

d.h. $\{\mathbf{Pv}_1, \mathbf{Pv}_2, \mathbf{Pv}_3, \mathbf{Pv}_4\} = \{\mathbf{Kv}_1, \mathbf{Kv}_2, \mathbf{Kv}_3, \mathbf{Kv}_4\}$.⁹ Unter (ii) zeigen wir dann, dass es zu diesen vier Punkt-Bildpunkt-Paaren *genau eine* stetige Kollineation gibt. Der Beweis schließt dann mit der Feststellung I.10, dass jede Projektivität eine stetige Kollineation ist. Das bedeutet, dass die unter (ii) eindeutig festgelegte Kollineation die Projektivität sein muss, deren Existenz unter (i) gezeigt wurde.¹⁰

- (i) Eine Projektivität zwischen zwei projektiven Ebenen wird durch 8 Konstanten eindeutig festgelegt. Sei nämlich $\mathbf{P} : \mathcal{P}V \rightarrow \mathcal{P}W$ eine Projektivität mit

$$\mathbf{P}\mathbf{v} = [Lv]$$

und $L : V \rightarrow W$ einer linearen Abbildung. Mit $Lv \in W$ sind dann auch alle skalaren Vielfache $\lambda Lv \in W$ Elemente der Bildmenge $\mathbf{P}\mathbf{v}$ zu $\mathbf{v} = [v]$. Die 9 Parameter der linearen Abbildung $L : V \rightarrow W$ kann man also durch die Freiheit in λ reduzieren. Im wesentlichen darf man einen der 9 Parameter auf eine beliebige Konstante festlegen; man kann dann die anderen acht Parameter immernoch so anpassen, dass man in jedem Fall eine zu \mathbf{P} kompatible, lineare Abbildung L' erhält.

Nehmen wir nun eine Kollineation und jeweils einen projektiven Punkt der Urbild- bzw. Bildebene, dann entspricht das 2 Bedingungen an die 8 Freiheitsgrade der gesuchten Projektivität. Schließlich sind nur die Verhältnisse der jeweils drei homogenen Koordinaten festgelegt: Seien $\mathbf{v} = [x : y : z]$ und $\mathbf{P}\mathbf{v} = [x' : y' : z']$, dann sind die beiden projektiven Punkte \mathbf{v} und $\mathbf{P}\mathbf{v}$ durch die Verhältnisse $\left\{\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right\}$ bzw. $\left\{\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}\right\}$ eindeutig bestimmt. Sei beispielsweise

$$(L) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

eine Matrixdarstellung einer zu \mathbf{P} kompatiblen linearen Abbildung, dann sind die beiden Bedingungen, die aus dem Punkt-Bildpunkt-Paar an die acht freien Parameter folgen:

$$\frac{x'}{z'} = \frac{x + a_{12}y + a_{13}z}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z} \quad \text{und} \quad \frac{y'}{z'} = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z}.$$

Wir brauchen also genau vier Punkt-Bildpunkt-Paare um eine Projektivität durch die daraus erwachsenden $4 \cdot 2 = 8$ Bedingungen festzulegen. Die vier abzubildenden Punkte müssen dabei eine projektive Basis bilden, damit daraus wirklich 8 unabhängige Bedingungen erwachsen. Entnehmen wir also einer Kollineation die vier Punkte einer projektiven Basis aus der Urbildebene und das entsprechende Bildquadrupel, dann wird durch die daraus entstehenden 8 Bedingungen eine Projektivität zwischen den Ebenen eindeutig festgelegt.

- (ii) Nehmen wir nun die vier Punkte samt Bildpunkten, so gibt es genau eine stetige Kollineation, die diese 8 Punkte aufeinander abbildet. Um dies zu zeigen verwenden wir

⁹Dass diese Projektivität durch diese Punkte sogar eindeutig festliegt, hat für die hier gegebene Argumentation keine Relevanz.

¹⁰Anhand eines kleinen Beispiels wird die Schlussweise des Beweises von Möbius sehr deutlich.

Der griechische Salat:

Aussage (i): Es gibt eine Olive mit Kern in dem Salat.

Aussage (ii): Es gibt genau eine Olive in dem Salat.

Schluss: Alle Oliven in dem Salat haben einen Kern.

Die Oliven in dem Salat entsprechen dabei den Kollineationen und diejenigen mit Kern den Projektivitäten.

eine Konstruktion von Möbius, der die Eigenschaften von Kollineationen (Bijektivität und Geradlinigkeit) ausnutzt um aus diesen vier Punkten die Bilder und Urbilder aller Punkte zu konstruieren (siehe Abbildungen 2 (a) und (b)).

Durch das Verbinden der vier Ausgangspunkte \bullet entstehen Geraden, die unter einer Kollineation auf Geraden abgebildet werden. Diese Verbindungsgeraden haben in jedem Fall Schnittpunkte \circ innerhalb der projektiven Ebene, die nicht mit den vier Ausgangspunkten identisch sind, und somit neue Geraden definieren, die wieder neue Schnittpunkte haben, und so fort. Wie man sofort einsieht, kann man die Konstruktion mit nur drei Punkten nicht durchführen. Da nun unter einer Kollineation Geraden auf Geraden abgebildet werden, ist das Bild des Schnittpunktes zweier Geraden natürlich der Schnittpunkt der Bildgeraden, in Zeichen:

Sei

$$\mathbf{p} := (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \cap (\mathbf{s} \vee \mathbf{t}) ,$$

der Schnittpunkt zwei beliebiger Geraden $(\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \neq (\mathbf{s} \vee \mathbf{t})$ in der Urbildebene, dann ist offensichtlich

$$\mathbf{Kp} \in \mathbf{K}(\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \mathbf{Kp} \in \mathbf{K}(\mathbf{s} \vee \mathbf{t})$$

und somit

$$\mathbf{Kp} \in (\mathbf{K}(\mathbf{q} \vee \mathbf{r})) \cap (\mathbf{K}(\mathbf{s} \vee \mathbf{t})) .$$

Da aber die Bilder auch Geraden sind $(\mathbf{K}(\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) = \mathbf{Kq} \vee \mathbf{Kr}, \mathbf{K}(\mathbf{s} \vee \mathbf{t}) = \mathbf{Ks} \vee \mathbf{Kt})$ enthält diese Schnittmenge genau einen Punkt, nämlich ihren Schnittpunkt:¹¹

$$\mathbf{Kp} = (\mathbf{Kq} \vee \mathbf{Kr}) \cap (\mathbf{Ks} \vee \mathbf{Kt}) .$$

Als nächstes zeigen wir, dass die Menge der Schnittpunkte, die wir durch die Konstruktion von Möbius erhalten, dicht in der Ebene liegt. Das bedeutet zu jedem Punkt der Ebene muss es einen Schnittpunkt geben, der innerhalb einer beliebigen ε -Umgebung dieses Punktes liegt. Wir geben dazu zwei Alternativen an:

- Zunächst stellt man fest, dass beliebige Punkte der Ebene in ein Dreieck aus Verbindungsgeraden eingeschlossen werden können. Da wir bei der Konstruktion von Möbius mit einer projektiven Basis gestartet sind, und bei der Konstruktion nur neue Schnittpunkte hinzugefügt haben, gibt es in jedem Fall einen weiteren Punkt außerhalb des Dreiecks, der mit den drei Eckpunkten eine projektive Basis bildet. Durch Verbindungsgeraden dieser Punkte lässt sich das Dreieck nun in sechs kleinere Dreiecke teilen (siehe Abbildung 2 (c)), von denen mindestens eines den gesuchten Punkt \oplus enthält. Die Eckpunkte des neuen Dreiecks liegen nun näher an dem gesuchten Punkt als die des ursprünglichen. Man kann die Iteration mit diesem Dreieck fortfahren, und auf diese Weise in irgendeinem Iterationsschritt jede beliebige aber feste Epsilonumgebung unterschreiten.
- Einfacher wird die Betrachtung, wenn man zu Anfang wie in Abbildung 2 (d) eine spezielle projektive Basis wählt. Man kann dann jedem Punkt innerhalb des initialen Rechtecks durch Intervallhalbierung beliebig nahe kommen. Die parallelen Seiten des Rechtecks schneiden sich im Unendlichen, den zweiten Punkt, der die nächsten Geraden festlegt erhält man als Schnittpunkt der Diagonalen. So kann

¹¹Dass tatsächlich $\mathbf{K}(\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \neq \mathbf{K}(\mathbf{s} \vee \mathbf{t})$ folgt aus der Bijektivität von \mathbf{K} .

man das initiale Rechteck in vier gleichgroße Rechtecke teilen und entscheiden in welchem dieser Rechtecke der gesuchte Punkt liegt. Man kommt durch Iteration dieses Verfahrens offensichtlich einem beliebigen Punkt \oplus innerhalb des Rechtecks beliebig nahe. Liegt der gesuchte Punkt außerhalb des initialen Rechtecks, wie in Abbildung 2 (e), so kann man das initiale Rechteck in beliebige Richtungen fortsetzen und sobald man ein Rechteck hat, das den Punkt enthält, die oben beschriebene Intervallhalbierung anwenden.

Die Schnittpunktmenge des Möbiusnetzes liegt also (unabhängig von der gewählten projektiven Basis) dicht in der projektiven Ebene. Der Analysis zu Folge ist eine stetige Abbildung aber bereits dann eindeutig festgelegt, wenn sie auf einer dichten Teilmenge der Urbildmenge eindeutig festgelegt ist.

Nach der Konstruktion in (ii) ist eine stetige Kollineation zwischen zwei projektiven Ebenen also durch die Angabe einer projektiven Basis und ihres Bildes *eindeutig* festgelegt. Wir schließen den Beweis, wie oben bereits bemerkt, mit der Feststellung I.10, dass jede Projektivität eine Kollineation ist. Demnach muss die durch die projektiven Basen eindeutig festgelegte Kollineation die Projektivität sein, deren Existenz unter (i) gezeigt wurde.

□

Verallgemeinerung der Konstruktion von Möbius. Bevor wir den Hauptsatz der projektiven Geometrie in seiner allgemeinen Form beweisen, wollen wir noch bemerken, dass man die Konstruktion von Möbius auch auf endlichdimensionale projektive Räume verallgemeinern kann. Der Anschaulichkeit halber stellen wir bei der konkreten Ausführung dieser Verallgemeinerung der Konstruktion für n Dimensionen die für $\dim(\mathcal{P}V) = 3$ gegenüber.

Verallgemeinerung für drei projektive Dimensionen

In drei Dimensionen entnehmen wir der initialen Kollineation also fünf Punkte von denen jeweils 4 ein Tetraeder, also einen 3-Simplex aufspannen. Das heißt diese 5 Punkte bilden eine projektive Basis. Wir wählen die Punkte als Eckpunkte eines Quaders (siehe Abbildung 2 (f)), natürlich dürfen dabei höchstens drei der initialen 4 Punkte \bullet in einer Ebene liegen. Die restlichen Kanten des Quaders (rot gezeichnet) erhalten wir durch das Verbinden der initialen Punkte mit den drei Durchstoßpunkten der initialen Geraden (schwarz) durch die "unendlich ferne" projektive Ebene, die wir bereits durch die Wahl der Koordinaten festgelegt haben. Damit sind also auch die sechs Flächen des Quaders eindeutig festgelegt. Liegt der gesuchte Punkt nun innerhalb des Quaders, so erhalten wir durch die Schnittpunkte der Flächen- (blau) bzw. Raumdiagonalen (grün) genügend neue Punkte, die wieder Geraden und damit Ebenen festlegen, die den Quader in 8 kleinere Quader teilen. Die Iteration kann, falls nötig, dann mit einem der 8 kleineren Quader fortgesetzt werden. Falls der gesuchte Punkt außerhalb des großen Quaders liegt, lässt sich dieser wie im Zweidimensionalen in beliebige Richtungen fortsetzen (siehe Abbildung 2 (e)). Zu bemerken ist noch, dass die Kollineation auf jeder Ebene bereits durch die Konstruktion von Möbius eindeutig festgelegt ist. Es genügt also mit einer Ebene beliebig nahe an jeden Punkt zu gelangen bzw. diesen zu treffen, um eine stetige Kollineation im Raume festzulegen.

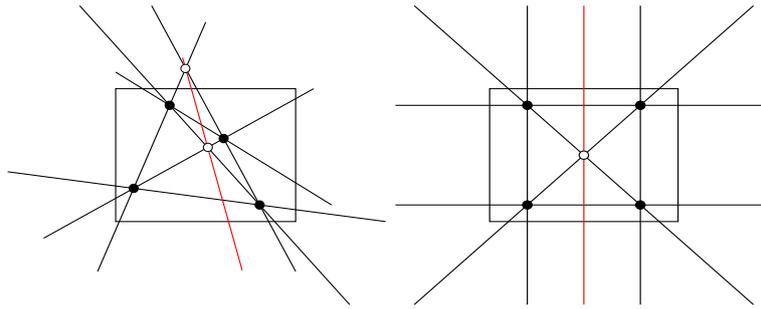
Verallgemeinerung für n projektive Dimensionen

In n Dimensionen wählen wir $n + 2$ Punkte von denen jeweils $n + 1$ einen n -Simplex aufspannen.

Wir können auch hier diese Punkte als Eckpunkte eines n -dimensionalen Quaders wählen. Wir wählen in einem kanonischen Koordinatensystem beispielsweise die $n + 2$ Punkte

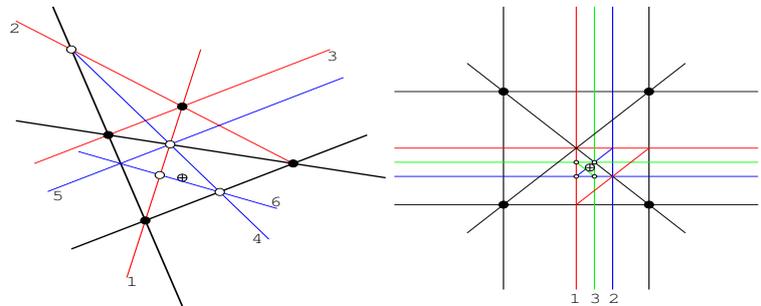
$$\begin{aligned} &(0, 0, 0, \dots, 0) \\ &(1, 0, 0, \dots, 0) \\ &(0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\quad \vdots \\ &(0, 0, 0, \dots, 1) \\ &(1, 1, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

und erhalten durch "Parallelverschiebung" der durch Verbindungsgeraden entstehenden n "Koordinatenachsen" durch alle anderen n Punkte in jeder Dimension die in dieser Dimension liegenden $n + 1$ Kanten des n -dimensionalen Würfels. Mit Parallelverschiebung meinen wir hier das neben erklärte Verbinden der gegebenen $n + 2$ Eckpunkte mit den Durchstoßpunkten der initialen Geraden durch die im Unendlichen liegende projektive Hyperebene der Dimension $n - 1$. Auf diese Weise lässt sich also der komplette Quader konstruieren. Analog zum Dreidimensionalen kann man wieder entscheiden, ob der gesuchte Punkt innerhalb oder außerhalb dieses Würfels liegt und den Quader gegebenenfalls in der entsprechenden Richtung fortsetzen, oder mittels Intervallhalbierung den einschließenden Quader immer kleiner machen.



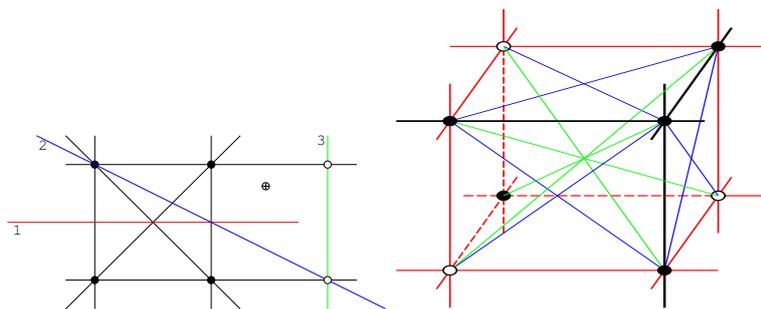
(a) Eine projektive Basis von 4 Punkten in allgemeiner Lage erzeugt durch Verbindungsgeraden neue Schnittpunkte im Endlichen.

(b) Auch wenn die Verbindungsgeraden parallel liegen, so schneiden sie sich innerhalb der projektiven Ebene. Dem unendlich fernen Schnittpunkt entspricht die Schnittgerade der beiden Bündelbenen in der Fluchtebene.



(c) Die neuen Punkte \circ liegen wesentlich näher an dem gesuchten Punkt \oplus als die Eckpunkte des schwarz gezeichneten initialen Dreiecks. Die Zeichenreihenfolge ist durch kleine Zahlen gekennzeichnet.

(d) Bei dieser speziellen Wahl der Basis ist das Konvergieren der Punktfolge durch einfache Intervallhalbierung sichergestellt. Auch hier ist die Zeichenreihenfolge durch Zahlen markiert.



(e) Liegt der Punkt außerhalb des Rechtecks, so lässt sich dies in beliebige Richtungen fortsetzen.

(f) In drei projektiven Dimensionen wird ein Würfel durch 5 Punkte eindeutig festgelegt.

ABBILDUNG 2. Spinnennetze à la Möbius

3. Der Hauptsatz der projektiven Geometrie

Um den Hauptsatz nun auch für komplexe projektive Räume zu beweisen, greifen wir auf den Beweis von Emil Artin [Art57] zurück, wie er beispielsweise in [Fis92] präsentiert wird.

THEOREM I.12 (Hauptsatz der projektiven Geometrie). *Seien $\mathcal{P}V$ und $\mathcal{P}W$ zwei projektive Räume mit*

$$\dim \mathcal{P}V = \dim \mathcal{P}W \geq 2,$$

dann ist jede Kollineation $\mathbf{K} : \mathcal{P}V \rightarrow \mathcal{P}W$ eine Semiprojektivität.

BEWEIS. E. Artin hat den Beweis dieses Satzes in viele kleine Schritte zerteilt:

(i) *Eine Kollineation bildet projektiv abhängige Mengen beliebiger, endlicher Dimension bijektiv aufeinander ab*

$$(2) \quad \mathbf{K}(\mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{v}_n) = \mathbf{K}\mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{K}\mathbf{v}_n,$$

respektiert also projektive Unterräume beliebiger Dimension.

BEWEIS. Wir müssen also zeigen, dass das Bild eines projektiven Unterraums wieder ein projektiver Unterraum der selben Dimension ist. Wir beschreiben einen projektiven Unterraum als Verbindungsraum $\mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{v}_n$ von $n + 1$ projektiven Punkten, das Bild des Verbindungsraums muss also die Verbindung der Werte $\mathbf{K}\mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{K}\mathbf{v}_n$ sein. Wir zeigen dies mittels Induktion. Für $n \in \{0, 1\}$ folgt die Aussage direkt aus der Eigenschaft der Kollineation (Definition I.5). Gelte also (2). Zu jedem

$$\mathbf{v} \in \mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{v}_{n+1}$$

gibt es ein $\mathbf{v}' \in \mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{v}_n$, sodass

$$\mathbf{v} \in \mathbf{v}' \vee \mathbf{v}_{n+1},$$

\mathbf{v}' ist dabei der Durchstoßpunkt der projektiven Gerade $\mathbf{v} \vee \mathbf{v}_{n+1}$ durch die projektive Hyperebene $\mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{v}_n$. Dieser (dann eindeutige) Durchstoßpunkt existiert im projektiven Fall immer wenn die Gerade nicht selbst in der Hyperebene liegt, was hier offensichtlich wegen der projektiven Unabhängigkeit der $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{n+1}\}$ nicht der Fall ist (siehe Abbildung 3). Weil \mathbf{K} eine Kollineation ist, folgt

$$\mathbf{K}\mathbf{v} \in \mathbf{K}\mathbf{v}' \vee \mathbf{K}\mathbf{v}_{n+1} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{v}_{n+1},$$

nach Induktionsvoraussetzung gilt aber $\mathbf{K}\mathbf{v}' \in \mathbf{K}\mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{K}\mathbf{v}_n$ und somit

$$\mathbf{K}\mathbf{v} \in \mathbf{K}\mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{K}\mathbf{v}_n \vee \mathbf{K}\mathbf{v}_{n+1} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{v}_{n+1}.$$

Wir haben also:

$$\mathbf{K}(\mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{v}_n) \subset \mathbf{K}\mathbf{v}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{K}\mathbf{v}_n.$$

Nach der Bemerkung I.6 ist nun auch \mathbf{K}^{-1} eine Kollineation, und demnach gilt für beliebige Strahlen $\mathbf{w}_k \in \mathcal{P}W$:

$$\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{w}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{w}_n) \subset \mathbf{K}^{-1}\mathbf{w}_0 \vee \cdots \vee \mathbf{K}^{-1}\mathbf{w}_n,$$

insbesondere also für $w_k = \mathbf{K}v_k$:

$$\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{K}v_0 \vee \cdots \vee \mathbf{K}v_n) \subset \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}v_0 \vee \cdots \vee \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}v_n,$$

nach Abbildung dieser Gleichung mit \mathbf{K} erhalten wir die Inklusion in die andere Richtung:

$$\mathbf{K}v_0 \vee \cdots \vee \mathbf{K}v_n \subset \mathbf{K}(v_0 \vee \cdots \vee v_n),$$

woraus die Behauptung direkt folgt. \square

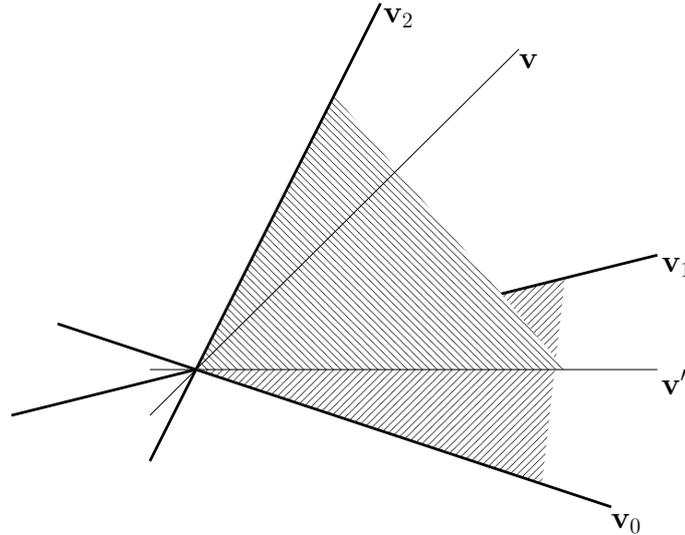


ABBILDUNG 3. Projektiver Durchstoßpunkt v' der Gerade $v \vee v_2$ durch die Hyperebene $v_0 \vee v_1$ im Fall von zwei projektiven Dimensionen.

BEMERKUNG. Demnach bildet eine Kollineation aber auch projektiv unabhängige Strahlen auf projektiv unabhängige Strahlen ab. Sei dazu I_n eine endliche Indexmenge, sei ferner $\{v_i\}_{i \in I_n}$ projektiv unabhängig und $\{\mathbf{K}v_i\}_{i \in I_n}$ projektiv abhängig. Da \mathbf{K} aber bijektiv ist, und \mathbf{K}^{-1} auch eine Kollineation ist, wäre dann nach (i) $\{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}v_i\}_{i \in I_n} = \{v_i\}_{i \in I_n}$ projektiv abhängig. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(ii) Es gibt Basen $(v_i)_{i \in I_n}$ von V und $(w_i)_{i \in I_n}$ von W , sodass

$$(3) \quad \mathbf{K}[v_i] = [w_i] \quad \text{und} \quad \mathbf{K}[v_0 + v_i] = [w_0 + w_i] \quad \forall i \in I_n.$$

BEWEIS. Wir wählen die Basis von V beliebig: $(v_i)_{i \in I_n}$. Dann sind die Strahlen $\{[v_i]\}_{i \in I_n}$ projektiv unabhängig. Nach der Bemerkung unter (i) ist dann die Menge $\{\mathbf{K}[v_i]\}_{i \in I_n}$ auch projektiv unabhängig, und wir können Vektoren $w'_i \in \mathbf{K}[v_i]$ wählen, die dann die erste Bedingung bereits erfüllen. Zur Erfüllung der zweiten Bedingung sei bemerkt, dass $v_0 + v_i \in [v_0] \vee [v_i]$ und demnach

$$\mathbf{K}[v_0 + v_i] \in \mathbf{K}[v_0] \vee \mathbf{K}[v_i] = [w'_0] \vee [w'_i],$$

es gibt also Skalare $\lambda, \mu_i \in \mathbb{K}^\times$, sodass

$$\mathbf{K}[v_0 + v_i] = [\lambda w'_0 + \mu_i w'_i]. \quad (\text{keine Summation!})$$

Definieren wir nun $w_0 := w'_0$ und $w_i := \lambda^{-1} \mu_i w'_i$, so erfüllen die Vektoren der Basis $(w_i)_{i \in I_n}$ beide Gleichungen. \square

Wie man sich anhand von Abbildung 4 leicht verdeutlicht wird bei fester Basis $\{v_i\}_{i \in I_n}$ und festem Vektor w_0 die Länge des Vektors w_i durch die Bedingung $\mathbf{K}[v_0 + v_i] = [w_0 + w_i]$ eindeutig festgelegt. Es werden demnach die Verhältnisse aller Basisvektoren $w_i, i \in I_n$ zu w_0 festgelegt, wodurch natürlich die Längenverhältnisse beliebiger Vektoren durch die Festlegung der Länge von w_0 eindeutig bestimmt sind. Die Basis $\{w_i\}_{i \in I_n}$ ist demnach bis auf eine Ähnlichkeitstransformation (globale Streckung oder Stauchung aller Vektoren) eindeutig bestimmt.

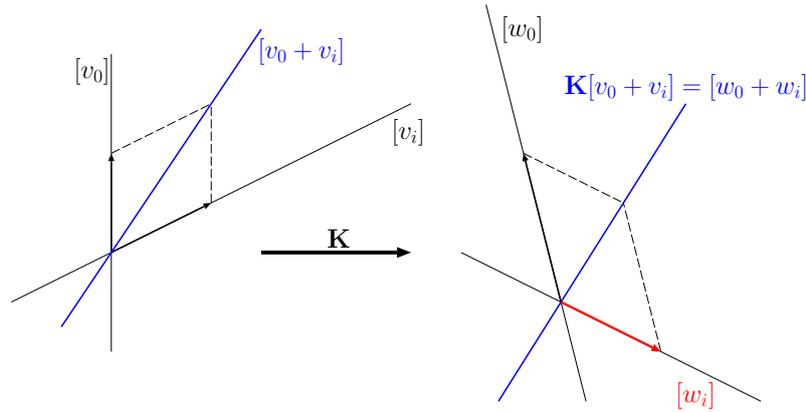


ABBILDUNG 4. Festlegung der Verhältnisse der Basisvektoren w_i

Im Falle komplexer Vektorräume werden durch die Bedingung (3) neben den Längenverhältnissen natürlich auch die so genannten relativen Phasen der Basisvektoren festgesetzt. Die Freiheit besteht dann nur noch in der einem globalen, komplexen Faktor.

(iii) $\mathbf{K} : \mathcal{P}V \rightarrow \mathcal{P}W$ induziert eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ des Grundkörpers, sodass

$$\sigma(0) = 0 \quad , \quad \sigma(1) = 1$$

und

$$\mathbf{K}[v_0 + \lambda v_i] = [w_0 + \sigma(\lambda) w_i] \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

BEWEIS. Die Zuordnung

$$z_i : \lambda \mapsto [v_0 + \lambda v_i]$$

definiert für jedes i eine eindeutige Abbildung des Körpers \mathbb{K} auf die projektive Gerade $[v_0] \vee [v_i]$. Wie man anhand von Abbildung 5 sieht, handelt es sich dabei um eine Zentralprojektion der affinen Gerade $\{v_0 + \lambda v_i : \lambda \in \mathbb{K}\}$ auf die projektive Gerade $[v_0] \vee [v_i]$, die eben aufgefasst als Schnittgerade der eingebetteten Bündelebene $[v_0] \vee [v_i]$ mit der Ebene E auch eine affine Gerade ist. Man macht sich anhand der zweiten Abbildung 6, in der nur die durch $[v_0]$ und $[v_i]$ bzw. $\mathbf{K}[v_0]$ und $\mathbf{K}[v_i]$ aufgespannte Projektionsebene gezeichnet ist, klar, dass bis auf $[v_i]$ alle projektiven Punkte der Geraden getroffen werden. Desweiteren erkennt man aus der Abbildung, dass die Punkte auf der projektiven

Geraden (blau) für $\lambda \rightarrow \pm\infty$ dem Punkt $[v_i]$ beliebig nahe kommen. Setzen wir also $z_i(\infty) := [v_i]$, so erhalten wir für jedes i eine bijektive Abbildung¹²

$$\mathbb{K} \cup \{\infty\} \rightarrow [v_0] \vee [v_i].$$

Nun wird $[v_0] \vee [v_i]$ unter \mathbf{K} bijektiv auf $[w_0] \vee [w_i]$ abgebildet. Sei also $\mathbf{K}[v_0 + \lambda v_i] = [\mu_0 w_0 + \mu_i w_i]$ das Bild von $[v_0 + \lambda v_i]$. Dieser Strahl $[\mu_0 w_0 + \mu_i w_i] \in [w_0] \vee [w_i]$ bestimmt nun wieder in eindeutiger Weise ein Element des Körpers:

$$[\mu_0 w_0 + \mu_i w_i] \mapsto \mu_0^{-1} \mu_i,$$

wobei wir wieder $[w_i] \mapsto \infty$ setzen können. Wir haben also

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \cup \{\infty\} & \dashrightarrow & \mathbb{K} \cup \{\infty\} \\ \downarrow & & \uparrow \\ [v_0] \vee [v_i] & \xrightarrow{\mathbf{K}} & [w_0] \vee [w_i] \end{array}$$

und können damit durch

$$\sigma_i(\lambda) := \mu_0^{-1}(\lambda) \mu_i(\lambda)$$

eine bijektive Abbildung $\sigma_i : \mathbb{K} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ definieren. Da nun die Unendlichkeiten ohnehin aufeinander abgebildet werden ($\infty \mapsto [v_i] \mapsto [w_i] \mapsto \infty$) können wir diese aus dem Definitionsbereich nehmen, und erhalten eine bijektive Abbildung $\sigma_i : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$. Wir haben dann auch:

$$\mathbf{K}[v_0 + \lambda v_i] \rightarrow [w_0 + \sigma_i(\lambda) w_i].$$

Und offensichtlich ist wegen (ii):

$$(4) \quad \sigma_i(0) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_i(1) = 1.$$

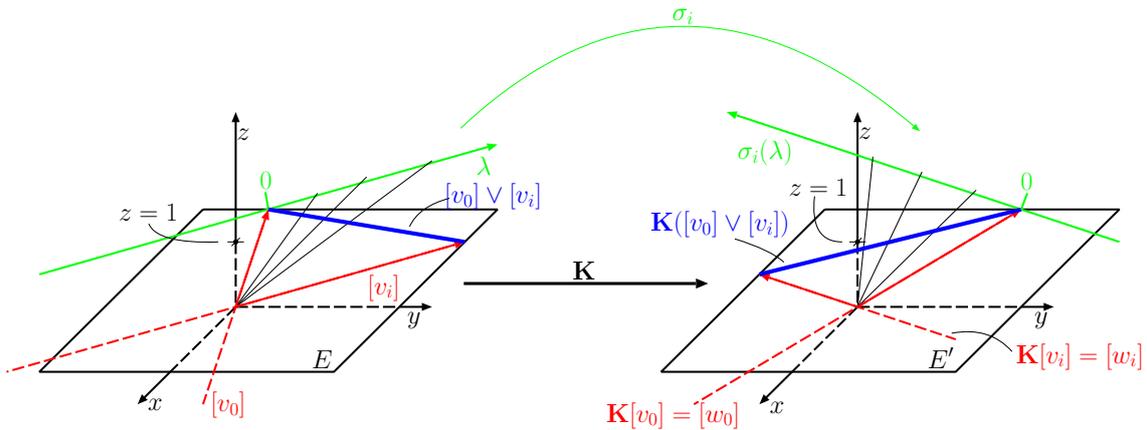


ABBILDUNG 5. Geometrische Veranschaulichung der bijektiven Körperabbildung $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ im dreidimensionalen Vektorraum.

¹²Am Rande sei bemerkt, dass $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von \mathbb{K} bezeichnet, die im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit der Sphäre $S^1 \approx \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}P^1$ und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit der Gauß'schen Zahlenkugel $\mathcal{P}_1(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}P^1$ zusammenfällt.

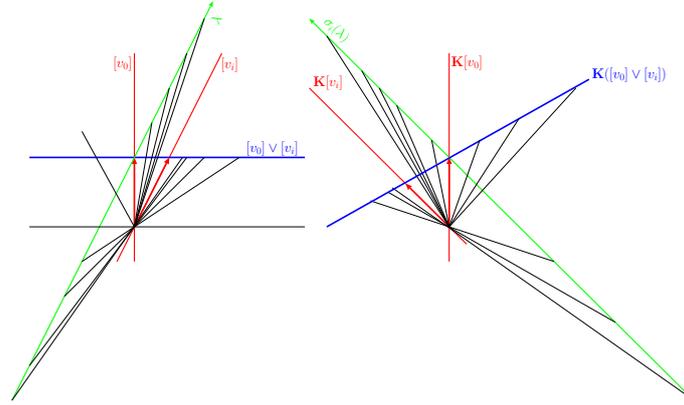


ABBILDUNG 6. Veranschaulichung der Verhältnisse in der durch $[v_0]$ und $[v_i]$ bzw. $[w_0]$ und $[w_i]$ aufgespannten Bündelebene.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die so definierte Abbildung nicht von der transformierten Gerade $[v_0] \vee [v_i]$, sondern lediglich von der Kollineation \mathbf{K} abhängt. Wir müssen also zeigen, dass

$$\sigma_i(\lambda) = \sigma_k(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Wegen der Homogenität des projektiven Raumes ist aber die Wahl des ‘‘Aufpunktes’’ $[v_0]$ der Gerade frei und wegen der Isotropie die Wahl der ‘‘Richtung’’ $[v_i]$. Es sollte für die Abbildung des Körpers also keine Rolle spielen, welche Gerade wir betrachten. Wir müssen hier, und dürfen auch, da wir in Urbild- und Bildraum bereits Basen $\{v_i\}_{i \in I_n}$ und $\{w_i\}_{i \in I_n}$ gewählt haben, vom affinen Standpunkt aus argumentieren, um Aussagen über Faktoren $\sigma_i(\lambda)$ machen zu können. Nehmen wir einen projektiven Punkt

$$(5) \quad [v_i - v_k] = [(v_0 + \lambda v_i) - (v_0 + \lambda v_k)],$$

so definiert dieser, wie wir in Abbildung 7 sehen, gleich zwei kongruente Dreiecke im Urbildraum (linke Figur). Das erste (blau gezeichnet) liegt in der Bündelebene $[v_i] \vee [v_k]$ und wird durch die Längen der beiden Vektoren v_i und v_k eindeutig festgelegt. Das zweite (grün gezeichnet) erhält man aus dem ersten durch Parallelverschiebung um v_0 und Streckung mit λ . Es ist dann offensichtlich kongruent zu dem blauen Dreieck. Bildet man nun die dabei entstehenden Bündelebenen $[v_i] \vee [v_k]$ und $[v_0 + \lambda v_i] \vee [v_0 + \lambda v_k]$ unter \mathbf{K} ab, so sind die Bildebenen eindeutig festgelegt und aufgrund der Bijektivität verschieden. Es folgt dann offensichtlich wegen $[v_i - v_k] \in [v_i] \vee [v_k]$ aus den Eigenschaften der Kollineation:

$$\mathbf{K} [v_i - v_k] \in [w_i] \vee [w_k]$$

und wegen (5) auch:

$$\mathbf{K} [v_i - v_k] \in [w_0 + \sigma_i(\lambda) w_i] \vee [w_0 + \sigma_k(\lambda) w_k].$$

Die Gerade $\mathbf{K} [v_i - v_k]$ ist also die Schnittgerade der beiden Bildebenen. Nun können wir die Schnittgerade auch aus den Bildebenen selbst bestimmen. In der ersten Bündelebene liegen alle Linearkombinationen von $\{w_i, w_k\}$, in der zweiten die von $\{w_0 + \sigma_i(\lambda) w_i, w_0 + \sigma_k(\lambda) w_k\}$. Für die Schnittpunkte muss also gelten:

$$\alpha_i w_i + \alpha_k w_k = \beta_i (w_0 + \sigma_i(\lambda) w_i) + \beta_k (w_0 + \sigma_k(\lambda) w_k),$$

mit zu bestimmenden Skalaren $\alpha_i, \alpha_k, \beta_i, \beta_k \in \mathbb{K}$. Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\alpha_i = \beta_i \sigma_i(\lambda) \quad , \quad \alpha_k = \beta_k \sigma_k(\lambda) \quad \text{und} \quad \beta_k = -\beta_i,$$

und somit

$$\mathbf{K}[v_i - v_k] = [\sigma_i(\lambda) w_i - \sigma_k(\lambda) w_k].$$

Des weiteren folgt für $\lambda = 1$ wegen (4):

$$\mathbf{K}[v_i - v_k] = [w_i - w_k],$$

die beiden letzten Gleichungen können aber nur gelten, falls

$$\sigma_i(\lambda) = \sigma_k(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

□

Geometrisch drückt diese Gleichung die Kongruenz der beiden Dreiecke in der rechten Figur aus. Zwei der drei Seiten des blauen bzw. grünen Dreiecks in der rechten Figur sind jeweils durch die Vektoren w_i und w_k bzw. ihre Parallelverschiebung um w_0 festgelegt. Die dritte Seite des blauen Dreiecks ist einfach der Vektor $w_i - w_k$. Die dritte Seite des grünen Dreiecks entsteht durch den Schnitt der Bündelebene $[w_0 + \sigma_i(\lambda) w_i] \vee [w_0 + \sigma_k(\lambda) w_k]$ mit der um w_0 parallelverschobenen Ebene $[w_i] \vee [w_k]$. Diese dritte Seite ist also, da sie aus der Parallelverschiebung einer der beiden Bündelebenen entsteht, parallel zu der Schnittgerade $[w_i - w_k]$, und damit parallel zu der dritten Seite des blauen Dreiecks, woraus die Kongruenz des blauen und grünen Dreiecks auch in der rechten Figur folgt.

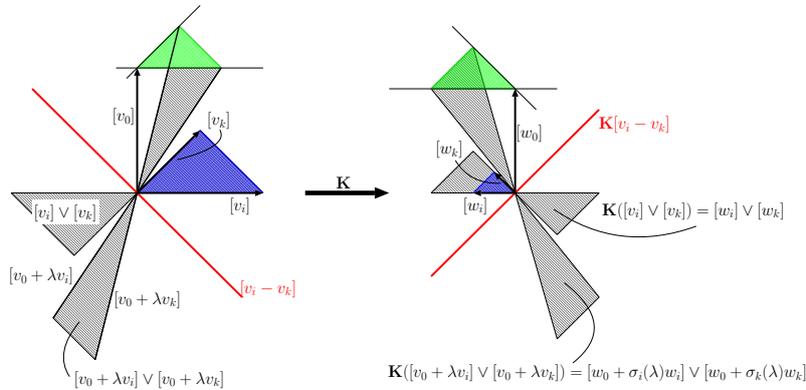


ABBILDUNG 7. Eindeutigkeit des Körperautomorphismus

Wir werden unter (vi) zeigen, dass die hier gefundene bijektive Abbildung ein Körperautomorphismus ist.

(iv) Mit der oben gefundenen Abbildung $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ erfüllt die Kollineation:

$$(6) \quad \mathbf{K}[v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n] = [w_0 + \sigma(\lambda_1) w_1 + \cdots + \sigma(\lambda_n) w_n].$$

BEWEIS. Wir führen den Beweis per Induktion. Für $n = 1$ folgt die Aussage aus (iii). Gelte also (6). Sei

$$\mathbf{p} := [v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n+1} v_{n+1}],$$

dann können wir \mathbf{p} auf zwei Arten aufteilen.

Zum einen ist $\mathbf{p} = \left[\underbrace{v_0 + \cdots + \lambda_n v_n}_a + \underbrace{\lambda_{n+1} v_{n+1}}_b \right]$ und damit

$$\mathbf{p} \in [a] \vee [b] = [v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n] \vee [v_{n+1}] ,$$

zum anderen ist $\mathbf{p} = \left[\underbrace{v_0 + \lambda_{n+1} v_{n+1}}_{a'} + \underbrace{v_1 + \cdots + v_n}_{b'} \right]$, also

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \in [a'] \vee [b'] &= [v_0 + \lambda_{n+1} v_{n+1}] \vee [v_1 + \cdots + v_n] \\ &\subset [v_0 + \lambda_{n+1} v_{n+1}] \vee [v_1] \vee \cdots \vee [v_n] . \end{aligned}$$

Im ersten Fall folgt aus der Induktionsannahme (6) und (ii):

$$\mathbf{Kp} \in [w_0 + \sigma(\lambda_1) w_1 + \cdots + \sigma(\lambda_n) w_n] \vee [w_{n+1}] ,$$

im zweiten Fall folgt aus (iii), (ii) und (i):

$$\mathbf{Kp} \in [w_0 + \sigma(\lambda_{n+1}) w_{n+1}] \vee [w_1] \vee \cdots \vee [w_n] .$$

Es gibt also Skalare $\alpha, \alpha', \beta, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$, sodass

$$\begin{aligned} \alpha(w_0 + \sigma(\lambda_1) w_1 + \cdots + \sigma(\lambda_n) w_n) + \alpha' w_{n+1} \\ = \beta(w_0 + \sigma(\lambda_{n+1}) w_{n+1}) + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n \in \mathbf{Kp} . \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert nun:

$$\alpha = \beta \quad , \quad \alpha' = \beta \sigma(\lambda_{n+1}) \quad \text{und} \quad \beta_i = \alpha \sigma(\lambda_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} .$$

Es ist also $\beta(w_0 + \sigma(\lambda_1) w_1 + \cdots + \sigma(\lambda_n) w_n) + \beta \sigma(\lambda_{n+1}) w_{n+1}$ und somit:

$$\mathbf{Kp} = [w_0 + \sigma(\lambda_1) w_1 + \cdots + \sigma(\lambda_{n+1}) w_{n+1}] .$$

□

(v) Für $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ gilt:¹³

$$\mathbf{K}[\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n] = [\sigma(\lambda_1) w_1 + \cdots + \sigma(\lambda_n) w_n] .$$

BEWEIS. Sei

$$\mathbf{p} \equiv [p] = [\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n] ,$$

dann ist einerseits

$$\mathbf{p} \in [v_1] \vee \cdots \vee [v_n] ,$$

wegen (i) und (ii) also

$$\mathbf{Kp} \in [w_1] \vee \cdots \vee [w_n] .$$

Auf der anderen Seite ist \mathbf{p} sicher in der Ebene

$$\mathbf{p} \in [v_0] \vee \mathbf{p} = [v_0] \vee [\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n] .$$

¹³Die Schreibweise $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ bedeutet hier, dass zwar beliebig viele der Koeffizienten λ_i , aber eben nicht alle verschwinden dürfen. Diese Voraussetzung ist fast selbstverständlich, da $[0] \notin \mathcal{PV}$.

Die Basis dieser Ebene kann man nun auch anders wählen, denn aufgrund des Austauschsatzes erhält man aus $\{v_0, p\}$ eine zweite Basis der selben Ebene, wenn man den zweiten Vektor p durch einen Vektor $v_0 + p$ ersetzt, der den ursprünglichen Repräsentanten als Komponente enthält:

$$\mathbf{p} \in [v_0] \vee [v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n] .$$

Für eine geometrische Anschauung dieses Sachverhaltes siehe Abbildung 8.

Wegen der Eigenschaften der Kollineation und (iv) erhalten wir also:

$$\mathbf{Kp} \in [w_0] \vee [w_0 + \sigma(\lambda_1) w_1 + \cdots + \sigma(\lambda_n) w_n] .$$

Es gibt demnach wieder Skalare $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ in \mathbb{K} und $\beta, \beta' \in \mathbb{K}^\times$, sodass

$$(7) \quad \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = \beta w_0 + \beta' (w_0 + \sigma(\lambda_1) w_1 + \cdots + \sigma(\lambda_n) w_n) \in \mathbf{Kp} .$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert wieder:

$$\beta = -\beta', \quad \alpha_i = \beta' \sigma(\lambda_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} .$$

Demnach ist $\beta' \sigma(\lambda_1) w_1 + \cdots + \beta' \sigma(\lambda_n) w_n \in \mathbf{Kp}$, also

$$\mathbf{Kp} = [\sigma(\lambda_1) w_1 + \cdots + \sigma(\lambda_n) w_n] .$$

□

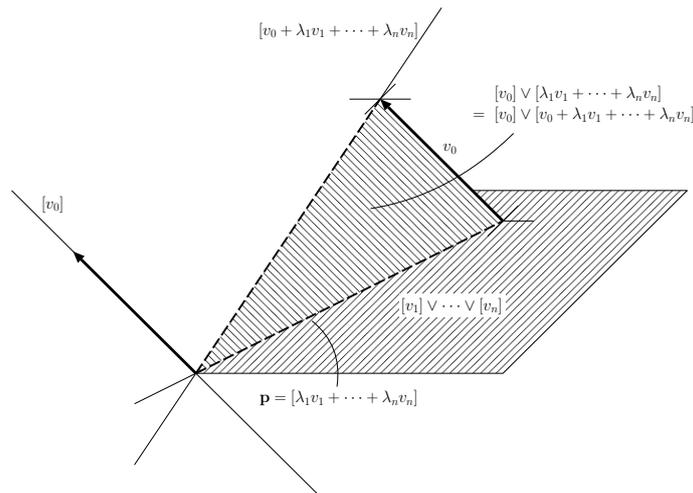


ABBILDUNG 8. Zunächst liegt der Strahl \mathbf{p} sicher in der Hyperebene $[v_1] \vee \cdots \vee [v_n]$. Verschieben wir nun einen beliebigen Repräsentanten von \mathbf{p} um v_0 in den größeren Raum $[v_0] \vee \cdots \vee [v_n]$, so können wir die dadurch entstehende Ebene, die natürlich \mathbf{p} enthält, durch beliebige Seiten des oben gezeichneten Dreiecks beschreiben, also auch durch $[v_0] \vee [v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n]$. Diese Aufteilung ist also nicht zwingend, sondern lediglich so gewählt, um zum einen das Ergebnis aus (iv) verwenden zu können und zum anderen eine möglichst einfache Form des zweiten Strahls zu erhalten.

(vi) Die induzierte bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ aus (iii) ist ein Körperautomorphismus.

BEWEIS. Wir müssen also, nachdem wir die Bijektivität bereits in (iii) gezeigt haben, noch die Additivität und die Multiplikativität zeigen.

Additivität: Wir betrachten

$$\mathbf{p} := [v_0 + (\lambda + \mu)v_1 + v_2],$$

dann ist $\mathbf{p} = [(v_0 + \lambda v_1) + (\mu v_1 + v_2)]$, also

$$\mathbf{p} \in [v_0 + \lambda v_1] \vee [\mu v_1 + v_2].$$

Wegen $\sigma(1) = 1$ aus (iii), (iv) und der Eigenschaft der Kollineation gilt demnach für das Bild von \mathbf{p} unter \mathbf{K} :

$$\mathbf{Kp} = [w_0 + \sigma(\lambda + \mu)w_1 + w_2] \in [w_0 + \sigma(\lambda)w_1] \vee [\sigma(\mu)w_1 + w_2].$$

Es gibt also wieder Skalare $\beta, \beta' \in \mathbb{K}$, sodass

$$w_0 + \sigma(\lambda + \mu)w_1 + w_2 = \beta(w_0 + \sigma(\lambda)w_1) + \beta'(\sigma(\mu)w_1 + w_2) \in \mathbf{Kp},$$

nach dem Koeffizientenvergleich sind $\beta = \beta' = 1$, und wir erhalten

$$\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu).$$

BEMERKUNG. Die einzigen Skalare, die wir in der projektiven Geometrie festlegen können sind Verhältnisse (siehe auch Abbildung 4). Um also λ und μ in der obigen projektiven Gerade zu fixieren, brauchen wir in den beiden zugehörigen Strahlen zusätzlich zu v_0 jeweils mindestens zwei festgelegte Basisvektoren, von denen einer mit λ und der andere mit μ gestreckt wird. Es sind also mindestens drei projektiv unabhängige Strahlen notwendig um die Additivität und wie wir im nächsten Schritt sehen werden auch die Multiplikativität von σ zu zeigen. Das ist der Grund für die Voraussetzung $\dim \mathcal{PV} \geq 2$ im Hauptsatz der projektiven Geometrie.

Multiplikativität: Wir betrachten:

$$\mathbf{p} := [v_0 + \lambda(\mu v_1 + v_2)] \in [v_0] \vee [\mu v_1 + v_2],$$

dann ist nach (iv) und (v):

$$\mathbf{Kp} = [w_0 + \sigma(\lambda\mu)w_1 + \sigma(\lambda)w_2] \in [w_0] \vee [\sigma(\mu)w_1 + w_2].$$

Es gibt demnach Skalare $\beta, \beta' \in \mathbb{K}$, sodass

$$w_0 + \sigma(\lambda\mu)w_1 + \sigma(\lambda)w_2 = \beta w_0 + \beta'(\sigma(\mu)w_1 + w_2) \in \mathbf{Kp},$$

und es folgt $\beta = 1, \beta' = \sigma(\lambda)$ und schließlich

$$\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu).$$

□

Wir mussten in (v) eine zusätzliche Dimension $[v_0]$ verwenden, um zu zeigen, dass \mathbf{K} auf dem Unterraum $[v_1] \vee \dots \vee [v_n]$ eine Semiprojektivität ist, können dieses Ergebnis aber nun verwenden, um zu zeigen, dass \mathbf{K} auf dem gesamten Raum $V = [v_0] \vee \dots \vee [v_n]$ eine Semiprojektivität ist:

(vii) Für beliebige $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ gilt:

$$\mathbf{K}[\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n] = [\sigma(\lambda_0)w_0 + \dots + \sigma(\lambda_n)w_n].$$

BEWEIS. Für $\lambda_0 = 0$ ist das die unter (v) bewiesene Aussage. Sei also $\lambda_0 \neq 0$. Dann ist

$$[\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n] = \left[v_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} v_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_0} v_n \right].$$

und wir erhalten mit (iv)

$$\mathbf{K} \left[v_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} v_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_0} v_n \right] = \left[w_0 + \sigma \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) w_1 + \cdots + \sigma \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_0} \right) w_n \right].$$

Nun ist aber

$$1 = \sigma(\alpha^{-1}\alpha) = \sigma(\alpha^{-1})\sigma(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}^\times,$$

und somit $\sigma(\alpha^{-1}) = \sigma(\alpha)^{-1}$. Wir haben also:

$$\mathbf{K} \left[v_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} v_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_0} v_n \right] = \left[w_0 + \sigma(\lambda_0)^{-1} \sigma(\lambda_1) w_1 + \cdots + \sigma(\lambda_0)^{-1} \sigma(\lambda_n) w_n \right],$$

woraus direkt die Behauptung folgt. \square

Zum Abschluss des Beweises sei noch bemerkt, dass wir durch

$$Sv_i = w_i \quad \forall i \in I_n$$

eindeutig eine semilineare Abbildung festlegen können, die nach Schritt (vii) kompatibel zu unserer Kollineation \mathbf{K} ist, d.h.

$$\mathbf{K}[v] = [Sv] \quad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

Die beliebig gewählte Kollineation \mathbf{K} ist also eine Semiprojektivität. \square

BEMERKUNG I.13. Artin verwendet in seinem Beweis im ersten Schritt eine Induktion nach dem Dimensionsparameter n . Das hat zur Folge, dass der oben zitierte Hauptsatz streng genommen nur für endlichdimensionale projektive Räume Gültigkeit besitzt. Wir können den Hauptsatz allerdings so verallgemeinern, dass er auch für unendlichdimensionale Hilberträume Gültigkeit behält. Was wir dann als Konsequenz erhalten ist gerade das aus der Quantenmechanik bekannte Wigner-Theorem. Siehe Kapitel VI.

4. Strukturgruppe projektiver Räume

Die Strukturgruppe des projektiven Raumes ist, wie wir aus der Betrachtung des Hauptsatzes der projektiven Geometrie bereits gelernt haben, die Gruppe der Semiprojektivitäten. Diese folgt ganz natürlich aus der Projektion der Strukturgruppe von \mathbb{K} -Vektorräumen $GL(n, \mathbb{K})$. So ist für einen n -dimensionalen projektiven Raum $\mathcal{P}V$:

$$SG(\mathcal{P}V) = GL(n+1, \mathbb{K})/\mathbb{K}^\times.$$

Hierin, das heißt in dem Herausteilen der Ähnlichkeitstransformationen (Streckungen und Stauchungen) aus der Linearen Gruppe, liegt die Ursache dafür, dass es die Semiprojektivitäten und eben nicht alleine die Projektivitäten sind, die die Strukturgruppe der projektiven Räume ausmachen.

Physikalische Zustände und projektiver Hilbertraum

Nachdem wir im letzten Kapitel einiges über die projektive Geometrie und insbesondere deren Hauptsatz gelernt haben, wollen wir im folgenden die Anwendung dieser mathematischen Werkzeuge in der Quantenmechanik motivieren. Wir stellen der konkreten Ausführung zunächst aber eine Wiederholung der der Quantenmechanik zu Grunde liegenden Axiomatik voran. Im dritten Abschnitt gehen wir dann kurz auf die Besonderheiten des quantenmechanischen Zustands ein, und beleuchten im vierten Abschnitt dann den projektiven Charakter der Quantenmechanik.

1. Zustand, Observable und physikalisches System

Wir beginnen dieses einführende Kapitel mit einigen Begriffsklärungen.

Physikalisches System. Unter einem physikalischen System wollen wir ein abgeschlossenes Gebiet der Raumzeit verstehen, das den Naturgesetzen unterworfen ist, ganz gleich durch welche physikalische Theorie diese Gesetze beschrieben werden.

Observable. Unter einer Observable verstehen wir eine zur Beschreibung eines physikalischen Systems geeignete Größe, der durch eine Messung ein bestimmter Wert zugeordnet wird.
BEISPIEL: In der klassischen Mechanik ist eine Observable o eine Funktion auf dem Tangentialbündel TQ des Konfigurationsraums Q

$$o : TQ \rightarrow \mathbb{R},$$

wie zum Beispiel die Energie, eine Orts- oder eine Impulskomponente.

Zustand. Der Zustand eines physikalischen Systems ist ein Funktional, das allen Observablen des Systems einen bestimmten Wert zuordnet.

BEISPIEL: In der Klassischen Mechanik ist ein Zustand z also ein Funktional auf dem Raum der Funktionen auf TQ :

$$z : \mathcal{F}(TQ) \rightarrow \mathbb{R} : o \mapsto z[o] = o(q, \dot{q}).$$

Zu jedem Punkt $(q, \dot{q}) \in TQ$ gibt es also genau einen Zustand z . In diesem Sinne können wir die Punkte des Tangentialbündels TQ auch als Zustände bezeichnen.

Die möglichen Zustände eines physikalischen Systems, d.h die in der Natur beobachtbaren Zustände, nennen wir kurz *physikalische Zustände*.

2. Die Axiome der Quantenmechanik

[A-I] Der Zustand eines quantenmechanischen Systems ist durch die Angabe eines Elements a eines separablen Hilbertraums \mathcal{H} eindeutig festgelegt.

[A-II] Die Observablen A des Systems werden durch hermitesche Operatoren \hat{A} auf dem Hilbertraum \mathcal{H} dargestellt.

[A-III] Der Formalismus des Messprozesses

- Als Ergebnisse einer Messung der Observablen A kommen nur Eigenwerte α des zugehörigen Operators \hat{A} in Frage.
- Nach einer Messung des Eigenwertes α befindet sich das System in dem durch einen Eigenvektor a zu α repräsentierten Zustand.
- Die Wahrscheinlichkeit in einem durch b repräsentierten Zustand den Eigenwert α des Operators \hat{A} zu messen ist gegeben durch die Wahrscheinlichkeit, dass der durch b repräsentierte Zustand mit dem durch den Eigenvektor a zu α repräsentierten Zustand übereinstimmt

$$(8) \quad W_\alpha := \frac{|\langle a|b\rangle|^2}{\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle}.$$

Ist der Eigenraum zu α n -dimensional mit orthogonaler Basis $\{a^k\}_{k \in \{1, \dots, n\}}$, so nennt man den Eigenwert α n -fach entartet, und die Wahrscheinlichkeit α zu messen ist:¹

$$(9) \quad W_\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{|\langle a^k|\psi\rangle|^2}{\langle a^k|a^k\rangle\langle\psi|\psi\rangle}.$$

- Der Mittelwert unendlich vieler Messungen der Observablen A in dem Zustand, der durch den Vektor $b \in \mathcal{H}$ repräsentiert wird, ist

$$\langle A \rangle_b := \frac{\langle b|\hat{A}b\rangle}{\langle b|b\rangle}.$$

[A-IV] Die Zeitentwicklung des Systems ist gegeben durch die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a = \hat{H}a,$$

mit \hat{H} dem Hamiltonoperator.

3. Besonderheiten des quantenmechanischen Zustandsbegriffs

Nach der obigen Begriffsklärung ist ein Zustand ein Funktional, das allen Observablen eines physikalischen Systems einen bestimmten Wert zuordnet. Wir können diesen Zustand also -wie in der Klassischen Mechanik- durch das durch Messung entstehende Wertetupel charakterisieren. Dabei unterscheidet sich die Quantenmechanik von der Klassischen Mechanik in zwei grundlegenden Eigenschaften. Zum einen können wir nicht alle Observablen eines Systems gleichzeitig messen, und zum anderen wird ein bestimmter Wert einer Observablen nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gemessen. Die erste Beobachtung führt auf den Begriff einer Maximalzahl gleichzeitig messbarer Observablen, denen im Formalismus der Quantenmechanik ein "maximales" Tupel kommutierender Operatoren zugeordnet ist. Aus den Axiomen haben wir nun gelernt, dass als Messwerte für Observablen nur Eigenwerte der zugehörigen Operatoren in Frage kommen. Wir können den Zustand des quantenmechanischen Systems also als Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Eigenwertspektren eines maximalen Operatortupels von gleichzeitig messbaren Observablen beschreiben (siehe Abbildung 1).

¹Wir unterschlagen bei diesem Zitat der Axiome der Quantenmechanik den Fall, dass \hat{A} ein kontinuierliches Spektrum besitzt. Es lassen sich jedoch die Formeln (8) und (9) auf diesen Fall verallgemeinern.

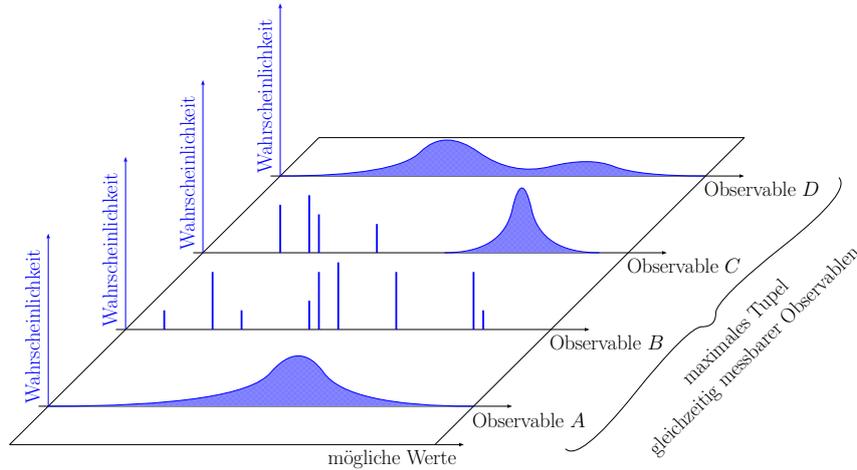


ABBILDUNG 1. Der quantenmechanische Zustand als Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Eigenwertspektren eines maximalen Operatorstupels von kommutierenden Observablen. Das Integral der Wahrscheinlichkeiten über jedes einzelne Spektrum muss natürlich Eins ergeben.

Nun hängen weder die Eigenwertspektren, noch die Wahrscheinlichkeiten für die Messung eines bestimmten Eigenwertes von der Norm des Hilbertraumrepräsentanten ab, durch den der betrachtete Zustand beschrieben wird (vgl. Eigenwertgleichung: $\hat{A}a = \alpha a$ bzw. (8) und (9)). Demnach beschreiben alle Vektoren $\lambda a \in \mathcal{H}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ den selben Zustand.

4. Der Hilbertraum und der Raum der Zustände

Der im ersten Axiom der Quantenmechanik postulierte separable Hilbertraum ist ein \mathbb{C} -Vektorraum mit sesquilinearem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\mapsto \langle a | b \rangle, \end{aligned}$$

der bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ a &\mapsto \|a\| := \sqrt{\langle a | a \rangle} \end{aligned}$$

abgeschlossen ist. Aus der Separabilität folgt dabei die Existenz einer abzählbaren Basis zu \mathcal{H} . Im folgenden Abschnitt wollen wir uns nun mit der Beziehung dieses Raums zu dem Raum der physikalischen Zustände beschäftigen.

4.1. Projektiver Hilbertraum. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, einen Raum zu konstruieren, in dem jedem physikalischen Zustand genau ein Punkt entspricht. Wie wir bereits im letzten Abschnitt gelernt haben gehören alle Repräsentanten in der Äquivalenzklasse

$$(10) \quad [a] = \{a' \in \mathcal{H} : a' = \mu a, \mu \in \mathbb{C}^\times\}$$

zum selben Zustand. Den Zuständen entsprechen also komplexe Ursprungsgeraden in \mathcal{H} .

Die Suche nach einem Raum in dem jedem Zustand genau ein Punkt zugeordnet wird, führt uns also direkt auf den *projektiven* \mathbb{C} -Hilbertraum \mathcal{PH} .

DEFINITION (projektiver Hilbertraum - vorläufig). Ersetzen wir in der Definition I.1 des projektiven Raums den Vektorraum V durch einen Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ mit dem Skalarprodukt als zusätzliche innere Struktur, so erhalten wir als Quotientenraum den sogenannten *projektiven Hilbertraum*

$$\mathcal{PH} := \mathcal{H}/\mathbb{C}^\times .$$

Auf diesem Raum können wir wegen der zusätzlichen Struktur auf $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ auch eine intrinsische Struktur erwarten (siehe Abschnitt 4.1.3), betrachten aber zunächst das topologische Aussehen des projektiven Hilbertraums.

4.1.1. *Topologische Struktur des projektiven Hilbertraums.* Wie im I. Kapitel kann man die Zentralprojektion $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{PH}$ verwenden, um eine gewisse geometrische Anschauung von dem projektiven Hilbertraum zu erhalten. Die Faser dieser Projektion ist wieder:

$$\pi^{-1}(\mathbf{a}) = \{a' \in \mathcal{H} : a' = \lambda a, \lambda \in \mathbb{C}^\times\} .$$

Aufgrund der durch das Skalarprodukt induzierten Norm auf \mathcal{H} kann man auch in \mathcal{H} eine Sphäre (unendlicher Dimension) definieren, die in \mathcal{H} eingebettet ist:

$$S^\infty := \{a \in \mathcal{H} : \|a\| = 1\} .$$

Wir schränken π ein und erhalten:

$$\pi|_{S^\infty} : S^\infty \rightarrow \mathcal{PH}$$

mit der Faser

$$(\pi|_{S^\infty})^{-1}(\mathbf{a}) = \{a' \in \mathcal{H} : a' = \lambda a, \lambda \in \text{U}(1), \|a\| = 1\} .$$

Man kann nun wieder die Orbits der $\text{U}(1)$ auf der $S^\infty \subset \mathcal{H}$ herausteilen, wir schreiben $\tilde{S}^\infty := S^\infty/\text{U}(1)$ und erhält den Homöomorphismus:

$$\pi|_{\tilde{S}^\infty} : \tilde{S}^\infty \rightarrow \mathcal{PH} .$$

Der projektive Hilbertraum \mathcal{PH} ist also homöomorph zu $S^\infty/\text{U}(1)$. Wir halten fest:

$$(11) \quad \boxed{\mathcal{PH} \approx S^\infty/\text{U}(1)} .$$

Zu jedem Strahl $\mathbf{a} \in \mathcal{PH}$ gehört also genau ein Orbit der $\text{U}(1)$ auf der S^∞ . Wir wollen diese Orbits, also die Elemente von $S^\infty/\text{U}(1)$, als *Einheitskreise* \mathbf{a} bezeichnen; eine Notation, die in Abbildung 2 veranschaulicht wird:

$$(12) \quad \mathbf{a} := \{a' \in S^\infty \subset \mathcal{H} : a' = \lambda a, \lambda \in \text{U}(1)\} .$$

Bereits im letzten Abschnitt haben wir gelernt, dass jedem Zustand und damit jedem Strahl in \mathcal{PH} auch ein Orbit der Gruppe \mathbb{C}^\times auf \mathcal{H} entspricht:

$$\mathbf{a} := [a] = \{a' \in \mathcal{H} : a' = \mu a, \mu \in \mathbb{C}^\times\} .$$

Wir haben also verschiedene "Gesichter" quantenmechanischer Zustände kennen gelernt, die wir hier nochmals zusammenfassen. Die quantenmechanischen Zustände sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen über den Eigenwertspektren eines maximalen Tupels kommutierender Operatoren, die in bijektiver Korrespondenz stehen zu den

- Elementen (Strahlen) des projektiven Hilbertraums \mathcal{PH} ,
- Orbits des $\text{U}(1)$ auf der Einheitskugel $S^\infty \subset \mathcal{H}$.

Der Hilbertraum der Repräsentanten quantenmechanischer Zustände trägt demnach eine natürliche Prinzipalbündelstruktur. Die Unterscheidung die wir hier machen ist in der Sprache der Prinzipalbündel die Unterscheidung zwischen den beiden Bündeln:

$$\begin{array}{ccc} U(1) & \longrightarrow & S^\infty \\ & & \downarrow \pi \\ & & S^\infty/U(1) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & & \downarrow \pi \\ & & \mathcal{P}\mathcal{H} \end{array}$$

Es sei an dieser Stelle nochmals explizit darauf hingewiesen dass sich die Räume $S^\infty/U(1)$ und $\mathcal{P}\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}/\mathbb{C}^\times$ als Quotientenräume nicht voneinander unterscheiden. Der einzige Unterschied liegt innerhalb der Äquivalenzklassen. So sind beispielsweise im ersten Fall nur normierte Repräsentanten von Zuständen zugelassen; es wird also die Interpretation des Normquadrates der Repräsentanten als Gesamtwahrscheinlichkeit betont. Im zweiten Fall sind Repräsentanten beliebiger Norm zugelassen; hier tritt also der projektive Charakter quantenmechanischer Zustände in den Vordergrund. Es ist aber natürlich auch hier eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation möglich, bei der man dann aber eben die Norm der Vektoren berücksichtigen muss (siehe Abschnitt 4.1.3).

4.1.2. *Zustände, Strahlen und Einheitskreise.* Der Zusammenhang zwischen Strahlen (Orbits von \mathbb{C}^\times in \mathcal{H}) und Einheitskreisen (Orbits der $U(1)$ auf S^∞) wird nochmals in Abbildung 2 verdeutlicht.

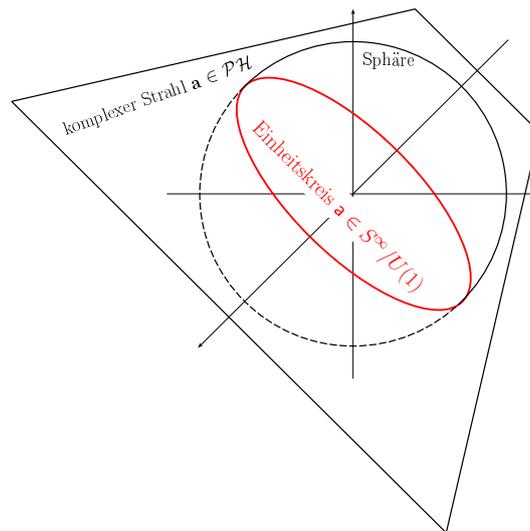


ABBILDUNG 2. Der Einheitskreis $a \in S^\infty/U(1)$ als Schnittmenge des komplexen Strahls $a \in \mathcal{P}\mathcal{H}$ und der Sphäre S^∞ . Gezeichnet sind die Einbettungen von a bzw. a in \mathcal{H} im Spezialfall eines dreidimensionalen Hilbertraums.

Wir werden in dieser Arbeit beide Interpretationsweisen verwenden und genauer beleuchten, indem wir verschiedene Beweise des Wigner-Theorems einander gegenüberstellen. Steven Weinberg betrachtet in seinem Beweis des Wigner-Theorems in [Wei95b], den wir in Kapitel IV näher beleuchten, Einheitskreise; wohingegen der oft zitierte Beweis von Valentine Bargmann [Bar64] eine Verallgemeinerung dieser Einheitskreise verwendet, die er aus den Orbits der $U(1)$ auf dem Hilbertraum \mathcal{H} erhält. Wir werden diese $U(1)$ -Orbits in der gesamten Arbeit als Kreise bezeichnen. Auch wenn sich Bargmann mit dieser Verallgemeinerung in gewissem Sinne von der projektiven Interpretationsweise des Wigner-Theorems distanziert, ist eine Betrachtung seines Beweises

dennoch auch aus geometrischer Sicht interessant, da man von ihm aus Parallelen zu dem Beweis des Hauptsatzes der projektiven Geometrie von Emil Artin ziehen kann (siehe Kapitel V). Eine genauere Analyse der projektiven Struktur des Wigner-Theorems, bei der wir die Interpretation der Zustände als Strahlen verwenden, führt dabei auf das interessante Ergebnis, dass das 1931 von Eugen Wigner vorgestellte Theorem eine Verallgemeinerung des in Kapitel I für \mathbb{K} -Vektorräume diskutierten Hauptsatzes der projektiven Geometrie auf projektive Hilberträume ist (siehe Kapitel VI).

Neben der im Allgemeinen unendlichen Dimension haben Hilberträume in dem Skalarprodukt nun auch eine zusätzliche Struktur. Auch für diese Struktur gibt es eine kanonische "Projektion" auf den projektiven Hilbertraum \mathcal{PH} .

4.1.3. *Intrinsische Struktur.* Das Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ induziert auf dem projektiven Hilbertraum \mathcal{PH} eine intrinsische Struktur:

$$(13) \quad \begin{aligned} \odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\mapsto \mathbf{a} \odot \mathbf{b} := \frac{|\langle a|b \rangle|^2}{\langle a|a \rangle \langle b|b \rangle} \quad \forall a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Es sind nun zum besseren Verständnis dieser Struktur einige Bemerkungen zu machen:

- Die reelwertige Funktion $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, da für zwei beliebige andere Repräsentanten $a' \in \mathbf{a}, b' \in \mathbf{b}$ gilt:

$$\frac{|\langle a'|b' \rangle|^2}{\langle a'|a' \rangle \langle b'|b' \rangle} = \frac{|\langle \mu a | \nu b \rangle|^2}{\|\mu a\|^2 \|\nu b\|^2} = \frac{|\langle a|b \rangle|^2}{\|a\|^2 \|b\|^2} \quad \mu, \nu \in \mathbb{C}^\times.$$

- Wie wir weiter unten zeigen werden, ist der Wertebereich von $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[0; 1] \subset \mathbb{R}$ beschränkt, desweiteren ist $\mathbf{a} \odot \mathbf{b}$ genau dann gleich Eins, wenn die beiden Strahlen (Zustände) \mathbf{a} und \mathbf{b} gleich sind. Man könnte die Größe $\mathbf{a} \odot \mathbf{b} \in [0; 1] \subset \mathbb{R}$ also als *Übergangswahrscheinlichkeit* zwischen den Zuständen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{PH}$ interpretieren. Aufgrund dieser Interpretation nennen wir die in (13) definierte Abbildung auch *Wahrscheinlichkeitsfunktion*.
- Die Abbildung $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R}$ ist kein Skalarprodukt auf \mathcal{PH} , da der projektive Raum kein linearer Raum ist. Demnach scheitert auch jeder Versuch auf \mathcal{PH} mit Hilfe der Funktion $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Norm zu definieren:

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{a} = \frac{|\langle a|a \rangle|^2}{\|a\|^2 \|a\|^2} = 1 \quad \forall a \in \mathbf{a} \subset \mathcal{H}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{PH}.$$

Wir haben bereits im letzten Kapitel gesehen, dass die Elemente des projektiven Raumes lediglich in ihrer Richtung und nicht in ihrer Länge festgelegt sind. Die Tatsache, dass $\mathbf{a} \odot \mathbf{a} = 1$ für beliebige Strahlen $\mathbf{a} \in \mathcal{PH}$ gilt, entspricht lediglich dem einleuchtenden Umstand, dass jeder Zustand natürlich mit sich selbst übereinstimmt.

- Betrachten wir den zweiten Raum $S^\infty/U(1)$, so können wir hier die selbe Funktion definieren, mit dem einzigen Unterschied, dass die Einheitskreise $\mathbf{a} \in S^\infty/U(1)$ nur normierte Repräsentanten haben:

$$(14) \quad \begin{aligned} \odot : (S^\infty/U(1)) \times (S^\infty/U(1)) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\mapsto \mathbf{a} \odot \mathbf{b} := |\langle a|b \rangle|^2 \quad \forall a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Wir können nun also unsere Definition vom Anfang des Kapitels etwas konkreter formulieren.

DEFINITION II.1 (projektiver Hilbertraum). Der projektive Hilbertraum (\mathcal{PH}, \odot) ist ein projektiver Vektorraum \mathcal{PH} zusammen mit einer zusätzlichen Struktur

$$\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R},$$

die wie in (13) durch das Skalarprodukt auf \mathcal{H} induziert wird.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch zeigen, dass man auf \mathcal{PH} mit der Funktion $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R}$ eine sehr nützliche Struktur zur Überprüfung der "linearen Abhängigkeit" bzw. Übereinstimmung von Zuständen oder projektiven Punkten im Allgemeinen hat:

LEMMA II.2 (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung für Projektive Hilberträume). Die Funktion $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt nur Werte in $[0; 1] \subset \mathbb{R}$ an und für die beiden Extremwerte folgt:

$$(15) \quad \mathbf{a} \odot \mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \perp b \quad \forall a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}$$

und

$$(16) \quad \mathbf{a} \odot \mathbf{b} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

BEWEIS. Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung besagt, dass auf \mathbb{K} -Vektorräumen V mit positiv definitem Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ gilt:

$$|\langle x | y \rangle|^2 \leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle$$

und weiter, dass

$$|\langle x | y \rangle|^2 = \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle \quad \Leftrightarrow \quad x = \lambda y.$$

Aus der ersten Gleichung folgert man sofort $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow [0; 1] \subset \mathbb{R}$ und aus der zweiten folgt (16). Gleichung (15) folgt trivial aus der positiven Definitheit des Betrags auf \mathbb{C} . \square

Symmetrien

Symmetrien werden in der Physik durch Gruppenwirkungen bzw. durch Invarianz unter solchen Gruppenwirkungen beschrieben. So folgen aus der Invarianz der Lagrangefunktion eines physikalischen Systems unter einer bestimmten Gruppenwirkung Erhaltungsgrößen. Das entsprechende Theorem wurde bekanntlich 1918 von Emmy Noether bewiesen [Noe18]. Entsprechend der gängigen Terminologie nennen wir die durch die Gruppenwirkung auf dem Raum der Zustände induzierten Transformationen selbst *Symmetrien* oder *Symmetrietransformationen*. Im ersten Abschnitt verdeutlichen wir uns die Gruppenstruktur dieser Transformationen anhand eines Beispiels und zitieren dann die zentrale Definition einer Symmetrietransformation in der Quantenmechanik. Wir verlieren im zweiten Abschnitt dann einige Worte über die Strukturgruppe des projektiven Hilbertraums und kümmern uns dann in Abschnitt 3 um die Probleme, die bei der Realisierung solcher Symmetrien auf dem Hilbertraum auftauchen können. Dabei führt uns der projektive Charakter der Quantenmechanik auf die so genannten projektiven Darstellungen, die wir im Lichte der Gruppenkohomologie analysieren wollen. Im letzten Abschnitt 4 zitieren wir dann das Theorem von Eugen Wigner über die Realisierung von Symmetrietransformationen auf dem Hilbertraum und leiten so über zu den verschiedenen Beweisen dieses Theorems, die wir in den folgenden Kapiteln diskutieren werden.

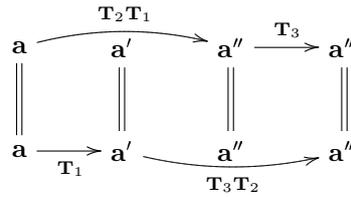
1. Grundlegende Definitionen und Gruppenstruktur

Im einfachsten Fall kann man eine Symmetrietransformation als einen Wechsel des Beobachters bzw. des Standpunktes, von dem ein physikalisches System (im selben Zustand) betrachtet wird, verstehen (passive Interpretation). Setzen wir uns nun in eines der Koordinatensysteme und beobachten das System in dem Zustand \mathbf{a} , so können wir, unter Kenntnis der "Achsentransformation" \mathbf{T}^{-1} , vorhersagen, dass der zweite Beobachter das System bezüglich seiner Koordinaten in dem Zustand $\mathbf{a}' = \mathbf{T}\mathbf{a}$ sehen wird (aktive Interpretation). Wir kennen diese Koordinatentransformationen sehr gut aus der klassischen Mechanik, wo es die Galilei- bzw. die Poincaré-Gruppe ist, die solche Symmetrietransformationen beschreibt. Es ist einleuchtend, dass solche Symmetrien, wie der Name bereits suggeriert, bijektive, also umkehrbare Abbildungen sind. Es geht also bei Symmetrietransformationen insbesondere keine Information über das System verloren. Gibt es mehr als zwei Beobachter, so induziert dies eine kanonische Verknüpfung zwischen den Symmetrietransformationen, die Hintereinanderausführung:

$$\mathbf{a} \xrightarrow{\mathbf{T}_1} \mathbf{a}' \xrightarrow{\mathbf{T}_2} \mathbf{a}'' .$$

$$\mathbf{a} \xrightarrow{\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1} \mathbf{a}'' .$$

Diese Verknüpfung ist assoziativ:



$$\mathbf{T}_3 (\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1) = (\mathbf{T}_3 \mathbf{T}_2) \mathbf{T}_1$$

und wir haben in diesem Fall also offensichtlich eine Gruppenstruktur vorliegen.

Die definierende Eigenschaft einer Symmetrie in der Quantenmechanik ist die folgende.

DEFINITION III.1 (Symmetrietransformation). Unter einer Symmetrietransformation verstehen wir eine Abbildung auf dem Raum der physikalischen Zustände, die

[SI] die Übergangswahrscheinlichkeiten respektiert.

[SII] eine Umkehrabbildung besitzt, die ebenfalls die Übergangswahrscheinlichkeiten respektiert.^a

^aWir nennen die zweite Eigenschaft, die eigentlich direkt aus der zu Grunde liegenden Gruppenstruktur folgt, kurz *Physikalische Umkehrbarkeit*.

In unserem Bild des Beobachterwechsels ist diese Definition einleuchtend. Natürlich sollen intrinsische Größen des physikalischen Systems, wie die Übergangswahrscheinlichkeiten, nicht von der Wahl des Bezugssystems abhängen, und demnach unter Symmetrietransformationen invariant bleiben. Umgekehrt sind die Übergangswahrscheinlichkeiten die einzigen Messgrößen, die uns zur Verfügung stehen, um festzustellen, ob sich an einem quantenmechanischen System etwas verändert hat.

Auf dem Projektiven Hilbertraum \mathcal{PH} können wir diese Definition mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R}$ aus Kapitel II schreiben. Sei also

$$\mathbf{T} : \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$$

eine Symmetrietransformation, dann werden die Bedingungen [SI] und [SII] zu:

[SI] *Erhaltung der Übergangswahrscheinlichkeit.*

$$\mathbf{T}\mathbf{a} \odot \mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{a} \odot \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{PH}$$

[SII] *Physikalische Umkehrbarkeit.*

Zu jedem \mathbf{T} existiert ein \mathbf{T}^{-1} , sodass $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \text{id}_{\mathcal{PH}}$ und

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{a} \odot \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{a} \odot \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{PH};$$

Betrachten wir speziell nur normierte Repräsentanten physikalischer Zustände, so erhalten wir Realisierungen der Symmetrietransformationen auf $S^\infty \subset \mathcal{H}$. Wir wollen das auch in unserer Notation kenntlich machen, und schreiben in diesem Fall:

$$\mathbf{T} : S^\infty / U(1) \rightarrow S^\infty / U(1)$$

für die Symmetrietransformation. Die entsprechenden Gleichungen sind:

$$[\text{SI}] \quad \mathbf{T}\mathbf{a} \odot \mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{a} \odot \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^\infty / U(1)$$

[SII] Zu jedem T existiert ein T^{-1} , sodass $T^{-1}T = TT^{-1} = \text{id}_{S^\infty/U(1)}$ und

$$T^{-1}a \odot T^{-1}b = a \odot b \quad \forall a, b \in S^\infty/U(1) .$$

DEFINITION III.2 (Quasiunitarität). Die erste Eigenschaft der Symmetrietransformation, die die Erhaltung der Übergangswahrscheinlichkeit ausdrückt:

$$T a \odot T b = a \odot b \quad \text{bzw.} \quad T a \odot T b = a \odot b$$

bezeichnen wir kurz als *Quasiunitarität*.

2. Strukturgruppe des projektiven Hilbertraums

Im Allgemeinen wird eine Symmetrietransformation in der Quantenmechanik also durch eine Gruppenwirkung

$$G \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$$

beschrieben. Es gibt demnach einen Gruppenhomomorphismus von G in die Strukturgruppe des projektiven Hilbertraumes:

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow \text{SG}(\mathcal{PH}) \equiv \text{Aut}(\mathcal{PH}) \\ g &\mapsto \rho_g \equiv \mathbf{T}(g) . \end{aligned}$$

Dies hat natürlich Konsequenzen für die gesuchten Realisierungen auf dem linearen Raum \mathcal{H} , siehe dazu den nächsten Abschnitt.

Die Strukturgruppe des projektiven Hilbertraums (\mathcal{PH}, \odot) resultiert, analog zu derjenigen allgemeiner projektiver Räume, aus der Projektion der Strukturgruppe des Hilbertraumes $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ (vgl. Abschnitt 4 in Kapitel I). Sie kommt demnach aus denjenigen Transformationen, die neben der Vektorraumstruktur von \mathcal{H} auch das Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ invariant lassen, eben aus der unitären Gruppe $U(\mathcal{H})$.

$$\text{SG}(\mathcal{PH}) = U(\mathcal{H})/\mathbb{C}^\times .$$

Alles, was von den unitären Transformationen auf \mathcal{H} nach der Projektion übrig bleibt ist also die Erhaltung der Orthogonalität projektiver Strahlen, die wir ebenso durch die Invarianz der intrinsischen Struktur $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R}$ ausdrücken können. Dass die Transformationen, die dabei herauskommen gerade die quasiunitären Abbildungen sind, liegt auf der Hand. Dass man allerdings auch den umgekehrten Weg gehen kann und aus den quasiunitären Abbildungen zwischen projektiven Hilberträumen immer auch kompatible, semiunitäre Transformationen erhält, ist Gegenstand des Wigner-Theorems, das wir in Abschnitt 4 zitieren und in den folgenden Kapiteln auf verschiedenste Weise untersuchen und beweisen werden (siehe Kapitel IV, V und VI).

3. Konsequenzen auf dem Raum der Repräsentanten

Wir wollen nun die Konsequenzen der Gruppenstruktur von Symmetrien für die Realisierungen auf dem (linearen) Hilbertraum etwas genauer analysieren. Wir werden uns dabei den Begriffen aus der Gruppenkohomologie bedienen. Eine knappe Einführung in die hier verwendeten Begrifflichkeiten für den Spezialfall der Gruppenkohomologie mit Koeffizienten in \mathbb{R} findet man in Anhang A. Zunächst wollen wir nun aber sagen, was wir unter einer solchen Realisierung auf dem Hilbertraum \mathcal{H} überhaupt verstehen.

DEFINITION III.3 (Kompatibilität). Eine Abbildung $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ heißt *kompatibel* zu einer Symmetrietransformation auf dem Raum der physikalischen Zustände, wenn folgendes gilt:

Der unter einer Symmetrie transformierte Zustand $\mathbf{T}\mathbf{a} \equiv \mathbf{T}a$ wird genau dann durch den Vektor $Aa \in \mathcal{H}$ repräsentiert, falls der Vektor $a \in \mathcal{H}$ den untransformierten Zustand $\mathbf{a} \equiv a$ repräsentiert.

In Formeln also:

$$Aa \in \mathbf{T}\mathbf{a} \quad \forall a \in \mathbf{a}.$$

DEFINITION III.4 (Quasiunitarität einer kompatiblen Abbildung). Ist die Abbildung $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ kompatibel zu einer quasiunitären Abbildung $\mathbf{A} : \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$, so nennen wir auch A *quasiunitär*. Insbesondere folgt dann natürlich

$$\frac{|\langle Aa | Ab \rangle|^2}{\|Aa\|^2 \|Ab\|^2} = \frac{|\langle a | b \rangle|^2}{\|a\|^2 \|b\|^2} \quad \forall a, b \in \mathcal{H}.$$

Es sind also genau die kompatiblen Abbildungen, die die Wirkung der Symmetrietransformationen auf dem Hilbertraum beschreiben. Man definiert deshalb:

DEFINITION III.5 (Realisierung). Eine zu einer Symmetrietransformation $\mathbf{T} : \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$ *kompatible* Abbildung $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ heißt *Realisierung* dieser Symmetrietransformation auf \mathcal{H} .

Nun, da wir gesagt haben, was wir unter der Realisierung einer Symmetrietransformation auf dem Hilbertraum \mathcal{H} verstehen, betrachten wir die Verknüpfung solcher Transformationen etwas genauer. Wir beschränken uns dabei auf die normierten Repräsentanten von Zuständen, betrachten also die Symmetrietransformationen $\mathbf{T} : S^\infty/U(1) \rightarrow S^\infty/U(1)$ und eine Realisierung $A(\mathbf{T}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dieser Transformationen auf dem Hilbertraum. Die Verknüpfung von zwei Symmetrietransformationen wird dann in folgendem Diagramm dargestellt:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{A(\mathbf{T}_2)A(\mathbf{T}_1)} & \mathcal{H} & \xrightarrow{A(\mathbf{T}_2)} & \mathcal{H} \\ \downarrow & \xrightarrow{A(\mathbf{T}_1)} & \downarrow & \xrightarrow{A(\mathbf{T}_2)} & \downarrow \\ S^\infty/U(1) & \xrightarrow{\mathbf{T}_1} & S^\infty/U(1) & \xrightarrow{\mathbf{T}_2} & S^\infty/U(1) \\ & & \xrightarrow{\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1} & & \end{array}$$

Offensichtlich führen sowohl $A(\mathbf{T}_2)A(\mathbf{T}_1)$, als auch $A(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1)$ auf Repräsentanten des selben Zustands

$$[A(\mathbf{T}_2)A(\mathbf{T}_1)a] = [A(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1)a] \quad \forall a \in \mathcal{H}.$$

Da nun aber die normierten Repräsentanten eines Zustands lediglich bis auf einen Phasenfaktor bestimmt sind, erhalten wir daraus als Realisierung eine so genannte *projektive Darstellung* der Symmetrietransformation auf dem Hilbertraum:

$$A(\mathbf{T}_2)A(\mathbf{T}_1) = e^{i\phi(\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1)} A(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1),$$

die durch das Auftauchen einer zusätzlichen Phase $\phi : \rho(G) \times \rho(G) \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ in der Grupp-multiplikation charakterisiert wird. Dass diese projektive Phase nicht von dem Vektor $a \in \mathcal{H}$

abhängt, folgt aus der Tatsache, dass wir die Realisierung A auf dem Hilbertraum immer semilinear wählen können:¹

$$\begin{aligned} e^{i\phi_{(a+b)}} A(T_2 T_1)(a+b) &= A(T_2) A(T_1)(a+b) \\ &= A(T_2) A(T_1)a + A(T_2) A(T_1)b \\ e^{i\phi_{(a+b)}} A(T_2 T_1)a + e^{i\phi_{(a+b)}} A(T_2 T_1)b &= e^{i\phi_a} A(T_2 T_1)a + e^{i\phi_b} A(T_2 T_1)b, \end{aligned}$$

wonach also $\phi_{(a+b)} = \phi_a = \phi_b$. Wir haben dabei insgeheim vorausgesetzt, dass es sich bei a und b um zwei linear unabhängige Repräsentanten superponierbarer Zustände handelt. Dann sind wegen der Semilinearität der Realisierung $A(T)$ auch die Bilder $A(T_2 T_1)a$ und $A(T_2 T_1)b$ linear unabhängig, und ein Koeffizientenvergleich macht tatsächlich Sinn.² Setzen wir voraus, dass die Gruppenwirkung von G auf $\mathcal{PH} \equiv S^\infty/U(1)$ effektiv ist, d.h. das einzige Element, das trivial auf \mathcal{PH} wirkt, ist die Einheit $e \in G$. Dann ist die Abbildung $\rho : G \rightarrow \rho(G) : g_k \mapsto T_k$ injektiv, und wir haben eine eindeutige Beziehung zwischen Elementen der Gruppe G und den Symmetrietransformationen auf \mathcal{PH} . Die Phase $\phi(T_2, T_1) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ induziert demnach auch eine Abbildung aus $G \times G$ in die reellen Zahlen (modulo 2π). Diese Abbildung bezeichnen wir mit dem selben Buchstaben:

$$\begin{aligned} \phi : G \times G &\rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ (g_1, g_2) &\mapsto \phi(g_2, g_1) = \phi(T_2, T_1). \end{aligned}$$

Natürlich wollen wir, dass A auch eine Realisierung der Gruppe G auf \mathcal{H} im herkömmlichen Sinne ist, die durch Hintereinanderausführung induzierte Verknüpfung zwischen den semilinearen Transformationen A soll also assoziativ sein:

$$(A(g_3) A(g_2)) A(g_1) = A(g_3) (A(g_2) A(g_1)).$$

Das führt vermittelt der Schritte

$$\begin{aligned} (A(g_3) A(g_2)) A(g_1) &= A(g_3) (A(g_2) A(g_1)) \\ e^{i\phi(g_3, g_2)} A(g_3 g_2) A(g_1) &= e^{i\phi(g_2, g_1)} A(g_3) A(g_2 g_1) \\ e^{i[\phi(g_3, g_2) + \phi(g_3 g_2, g_1)]} A(g_3 g_2 g_1) &= e^{i[\phi(g_2, g_1) + \phi(g_3, g_2 g_1)]} A(g_3 g_2 g_1) \end{aligned}$$

auf eine Kozykelbedingung für die projektive Phase:³

$$\phi(g_3, g_2) + \phi(g_3 g_2, g_1) = \phi(g_3, g_2 g_1) + \phi(g_2, g_1) \quad \Leftrightarrow \quad \delta^3 \phi = 0.$$

¹Diese Aussage ist ein Teil des Wigner-Theorems und wird später noch in aller Ausführlichkeit und auf verschiedenen Wegen bewiesen.

²Der Hilbertraum der Repräsentanten aller Zustände zerfällt wegen der Superauswahlregeln in kleinere Unterräume von Repräsentanten superponierbarer Zustände. Die Superauswahlregeln sind dabei aus dem Experiment bekannte Regeln, die es verbieten Zustände unterschiedlicher Ladung Q , Baryonenzahl B , Leptonenzahl L oder Spinstatistik $\kappa = (-1)^{2S}$ zu superponieren. Superponierbare Zustände, und mit ihnen die so genannten kohärenten Teilräume von \mathcal{H} werden demnach durch Zahlentupel (Q, B, L, κ, \dots) charakterisiert. Das spiegelt die Tatsache wieder, dass in der Natur lediglich Teilchen mit eindeutig bestimmter Ladung, Baryonenzahl, Leptonenzahl und Spin-Statistik vorkommen.

³Die Äquivalenz (" \Leftrightarrow ") folgt dabei aus der Definition der "äußeren Ableitung" δ^n in der Gruppenkohomologie (Definition A.2) im Anhang:

$$(\delta^3 \phi)(g_3, g_2, g_1) = \phi(g_2, g_1) - \phi(g_3 g_2, g_1) + \phi(g_3, g_2 g_1) - \phi(g_3, g_2).$$

Diese Bedingung ist natürlich trivial erfüllt, falls ϕ ein Korand ist:

$$(17) \quad \phi(g_2, g_1) = \alpha(g_2 g_1) - \alpha(g_2) - \alpha(g_1) \quad \Leftrightarrow \quad \phi = -\delta^2 \alpha.$$

In diesem Fall lässt sich aus A durch die Umdefinition

$$(18) \quad A \rightarrow A' := e^{i\alpha} A$$

eine ordinäre, nicht-projektive Realisierung machen. Wir haben nämlich:

$$\begin{aligned} A'(g_2) A'(g_1) &= e^{\alpha(g_2)} A(g_2) e^{\alpha(g_1)} A(g_1) \\ &= e^{\alpha(g_2) + \alpha(g_1)} e^{\phi(g_2 g_1)} A(g_2 g_1) \\ &= e^{\alpha(g_2 g_1)} A(g_2 g_1) \\ &= A'(g_2 g_1). \end{aligned}$$

Wie im Anhang beschrieben, nennt man die projektive Phase $\phi : G \times G \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ einen 2-Kozykel und die Funktion $\alpha : G \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ eine 1-Kokette der Gruppe G mit Werten in $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Kann man ϕ wie in Gleichung (17) aus einem 1-Kozykel erhalten, so nennt man ϕ einen 2-Korand. Die Beziehungen zwischen Kozykeln und Korändern von Gruppen sind der Struktur nach die selben, wie die aus der de Rham-Kohomologie bekannten Beziehungen zwischen geschlossenen und exakten k -Formen. So kann man auch hier Kohomologiegruppen $H^n(G, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \cong H^n(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ bilden, die als Elemente Äquivalenzklassen kohomologer Kozykel enthalten (siehe Anhang A).⁴ Wir haben also:

BEDINGUNG III.6. Eine hinreichende Bedingung dafür, dass die projektiven Phasen beliebiger Realisierungen einer Symmetrietransformation auf \mathcal{H} zum Verschwinden gebracht werden können, ist die Trivialität der zweiten Kohomologiegruppe der zugehörigen Gruppe G

$$H^2(G, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = \{0\}.$$

BEWEIS. Ist die zweite Kohomologiegruppe der Gruppe G trivial, so ist das einzige Element in $H^2(G, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die Äquivalenzklasse des trivialen 2-Kozykels $\phi_0 = 0$. Jeder 2-Kozykel von G ist dann kohomolog zu diesem trivialen Kozykel, unterscheidet sich von diesem also lediglich durch einen 2-Korand. Damit sind aber alle 2-Kozykel in G 2-Koränder. Man findet zu beliebigen projektiven Phasen ϕ also immer einen 1-Kozykel α , der ϕ wie in (17) erzeugt, das heißt $\phi = -\delta^2 \alpha$, und kann demnach eine projektive Darstellung A auf \mathcal{H} immer in der Form (18) umdefinieren. \square

Diese Bedingung ist natürlich nicht notwendig, da im Allgemeinen nicht alle denkbaren 2-Kozykel der Gruppe G aus projektiven Phasen stammen. Es genügt schließlich, dass die durch projektive Phasen induzierten 2-Kozykel der Gruppe G 2-Koränder sind.

In Abschnitt 2.7 des Buches "The Quantum Theory of Fields, I" von Steven Weinberg [Wei95b, S. 81 ff] macht der Autor deutlich, dass die projektive Phase einer Realisierung auf \mathcal{H} der Ursprung der so genannten Zentralladungen der entsprechenden Liealgebra von Erzeugenden der Transformationen auf \mathcal{H} sind. Weinberg nutzt diese Interpretation dazu aus, ein Theorem zu beweisen, das besagt, dass die projektive Phase immer dann trivial gewählt werden kann, wenn beide der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

⁴Zwei Kozykel heißen kohomolog, wenn sie sich lediglich um einen Korand unterscheiden.

- (a) Die Zentralladungen können durch eine Umdefinition der Erzeugenden zum Verschwinden gebracht werden.
- (b) Die Gruppe ist einfach zusammenhängend.

Wir können an dieser Stelle nun aber die begründete Vermutung äußern, dass sich die oben bewiesene algebraische Bedingung III.6 für das Verschwinden der projektiven Phasen einer Realisierung alleine aus der zweiten Bedingung (b) ergibt. Wir müssen dazu zeigen:

VERMUTUNG III.7. Die zweite Kohomologiegruppe $H^2(G, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist trivial, falls die Gruppe G einfach zusammenhängend ist, das heißt, wenn die Homotopiegruppen $\pi_0(G)$ und $\pi_1(G)$ der Liegruppe G verschwinden:

$$\pi_{\leq 1}(G) = 0 \quad \Rightarrow \quad H^2(G, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = 0.$$

BEWEISIDEE. ⁵ Zu einer beliebigen Gruppe G gibt es eine Faserung $EG \xrightarrow{/G} BG$, ein so genanntes universelles G -Bündel, sodass EG eine zusammenziehbare Mannigfaltigkeit ist. Insbesondere gilt dann $\pi_n(EG) = 0 \quad \forall n$. Zu dieser Faserung gibt es dann eine lange exakte Homotopiesequenz:

$$\cdots \rightarrow \pi_n(G) \rightarrow \pi_n(EG) \rightarrow \pi_n(BG) \rightarrow \pi_{n-1}(G) \rightarrow \pi_{n-1}(EG) \rightarrow \cdots,$$

aus der wir nach Konstruktion ($\pi_n(EG) = 0$) und wegen der Exaktheit der obigen Sequenz Isomorphismen

$$\pi_n(BG) \cong \pi_{n-1}(G) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

erhalten.

Nun sind nach Voraussetzung $\pi_0(G) = 0 = \pi_1(G)$, wonach also auch $\pi_1(BG) = 0 = \pi_2(BG)$. Nach dem Satz von Hurewicz [Bre93, S. 475 ff] gilt dann für die Homologiegruppen $H_1(BG, \mathbb{Z}) = 0 = H_2(BG, \mathbb{Z})$. Mit Hilfe von [Wei95a, Theorem 6.10.5] folgt daraus dann $H_1(G, \mathbb{Z}) = 0 = H_2(G, \mathbb{Z})$. Wir können dann ein universelles Koeffizienten-Theorem für die Gruppenkohomologie anwenden [Bro82, S.60]. Dieses liefert uns für ein G -Modul M , auf dem G trivial wirkt, die kurze exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(G, \mathbb{Z}), M) \rightarrow H^n(G, M) \rightarrow \text{Hom}(H_n(G, \mathbb{Z}), M) \rightarrow 0.$$

Für $n = 2$ folgt daraus, dass

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_1(G, \mathbb{Z}), M) \rightarrow H^2(G, M) \rightarrow \text{Hom}(H_2(G, \mathbb{Z}), M) \rightarrow 0,$$

also:

$$H^2(G, M) = 0$$

für einen beliebigen G -Modul M , auf dem G trivial wirkt. Bei der Betrachtung der Gruppenkohomologie in Anhang A hatten wir als G -Modul \mathbb{R} , in obiger Bedingung III.6 hatten wir $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ als G -Modul und in beiden Fällen ist die Gruppenwirkung auf dem Modul trivial, es folgt also die Behauptung. \square

Eine Folge dieser Vermutung wäre dann, dass die erste Bedingung (a) des Theorems von Steven Weinberg überflüssig ist.

⁵Die hier zusammengefasste Beweisidee erwuchs aus einer persönlichen Diskussion mit Jun.-Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen, FB Mathematik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz.

Nach diesem Ausflug in die homologische Algebra kommen wir nun zurück zu dem Theorem, das gewährleistet, dass wir beliebige Realisierungen von Symmetrietransformationen auf dem Hilbertraum semiunitär wählen können.

4. Das Wigner-Theorem

Nachdem wir nun also wissen, was wir unter einer Symmetrietransformation verstehen, sind wir in der Lage das Wigner-Theorem zu formulieren.

THEOREM III.8 (Wigner-Theorem). *Eine Symmetrietransformation zwischen physikalischen Zuständen kann auf der Stufe der Repräsentanten, das heißt auf dem Hilbertraum \mathcal{H} , immer als entweder unitärer oder antiunitärer Operator dargestellt werden.*

In der Sprache kommutativer Diagramme kann man das Wigner-Theorem wie folgt ausdrücken:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{U} & \mathcal{H} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{PH} & \xrightarrow{\mathbf{T}} & \mathcal{PH} \end{array}$$

mit \mathbf{T} quasiunitär und U semiunitär. Wir wollen also eine semiunitäre Hochhebung ("Lift") U der quasiunitären Abbildung \mathbf{T} finden.

Wie bereits in Kapitel II bemerkt, gibt es verschiedene Darstellungen der Repräsentanten physikalischer Zustände im Hilbertraum und dementsprechend auch verschiedene Vorgehensweisen beim Beweis des Wigner-Theorems. Wir wollen in den folgenden Kapiteln drei dieser Vorgehensweisen gegenüberstellen.

KAPITEL IV

Beweis des Wigner-Theorems nach Weinberg

Wir orientieren unsere Ausführungen in diesem Kapitel an der Argumentation von Steven Weinberg [Wei95b, S. 91 ff], stellen aber der eigentlichen Konstruktion von Weinberg in Abschnitt 2 einige Bemerkungen voran, die uns auch in den folgenden Kapiteln hilfreich sein werden. Weinberg lässt in seinem Beweis des Wigner-Theorems im Gegensatz zu Bargmann (Kap. V) und zu dem in Kapitel VI vorgestellten Beweis als Repräsentanten physikalischer Zustände lediglich normierte Vektoren zu. Um diesen Unterschied zu verdeutlichen schreiben wir für den Quotientenraum $\mathcal{PH} \equiv (\mathcal{H} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^\times$ in dem ganzen Kapitel $S^\infty / U(1)$ und für die Symmetrietransformation konsequenterweise

$$T : S^\infty / U(1) \rightarrow S^\infty / U(1) .$$

Die Äquivalenzklassen sind in diesem Kapitel also die Orbits der $U(1)$ auf der Sphäre, die wir, wie zuvor, als Einheitskreise bezeichnen. Wir formulieren in dieser Beschreibung zunächst das Wigner-Theorem:

THEOREM IV.1 (Wigner-Theorem in der Beschreibung durch Einheitskreise). *Sei $T : S^\infty / U(1) \rightarrow S^\infty / U(1)$ eine Symmetrietransformation auf dem projektiven Hilbertraum, d.h.*

[SI] T lässt die Übergangswahrscheinlichkeiten invariant:

$$T a \odot T b = a \odot b \quad \forall a, b \in S^\infty / U(1) .$$

[SII] zu T gibt es eine Inverse T^{-1} , die ebenfalls die Übergangswahrscheinlichkeiten respektiert

$$T^{-1} a \odot T^{-1} b = a \odot b \quad \forall a, b \in S^\infty / U(1) .$$

Dann gibt es einen zu T kompatiblen Operator U auf \mathcal{H} , das heißt

$$U a \in T a \quad \Leftrightarrow \quad a \in a \quad \forall a \in \mathcal{H} ,$$

der entweder *unitär*

$$U (\alpha a + \beta b) = \alpha (U a) + \beta (U b) \quad \forall a, b \in \mathcal{H}; \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$\langle U a | U b \rangle = \langle a | b \rangle \quad \forall a, b \in \mathcal{H}$$

oder *antiunitär*

$$U (\alpha a + \beta b) = \bar{\alpha} (U a) + \bar{\beta} (U b) \quad \forall a, b \in \mathcal{H}; \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$\langle U a | U b \rangle = \overline{\langle a | b \rangle} \quad \forall a, b \in \mathcal{H}$$

ist.

1. Vorbemerkungen

Um das Wigner-Theorem zu beweisen, müssen wir zum einen die Existenz einer kompatiblen Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sicherstellen und zum anderen zeigen, dass U unitär bzw. antiunitär gewählt

werden kann. Wir beweisen die Existenz durch die explizite Konstruktion einer kompatiblen Abbildung U und rechnen dann nach, dass das so konstruierte U die geforderten Eigenschaften hat. Es stellt sich heraus, dass die Schwierigkeit darin besteht eine semilineare, kompatible Abbildung zu T zu finden. Wie die folgenden Vorbemerkungen, Lemmata und Korrolare zeigen, ist der Schritt von der Semilinearität zur Semiunitarität ein kleiner.

Betrachten wir das Verhalten einer Orthonormalbasis (ONB) von \mathcal{H} unter einer Symmetrietransformation. Sei also I eine abzählbare Indexmenge und $\{b_k\}_{k \in I}$ eine ONB von \mathcal{H} .¹ Nun definiert jeder Basisvektor b_k genau einen Einheitskreis b_k . Diese orthogonalen Einheitskreise werden unter T bijektiv (Eigenschaft [SII]) auf Einheitskreise $\{Tb_k\}_{k \in I}$ abgebildet, die wegen [SI] auch orthogonal sind. Wählen wir also beliebige Repräsentanten $\tilde{b}_k \in Tb_k$, so erhalten wir eine zweite abzählbare ONB $\{\tilde{b}_k\}_{k \in I}$ von \mathcal{H} .

Wir haben also:

LEMMA IV.2. Sei $\{b_k\}_{k \in I}$ eine abzählbare ONB von \mathcal{H} mit zugehörigen Einheitskreisen b_k , und sei $T : S^\infty/U(1) \rightarrow S^\infty/U(1)$ eine Symmetrietransformation. Dann bilden beliebige Vektoren $\tilde{b}_k \in Tb_k$ eine zweite ONB $\{\tilde{b}_k\}_{k \in I}$ von \mathcal{H} .

BEWEIS. Wir haben zum einen die Orthonormalität und zum anderen die Vollständigkeit der Menge $\{\tilde{b}_k\}_{k \in I}$ zu zeigen.

(i) *Orthonormalität:* Aus der Quasiunitarität [SI] folgt für alle $\tilde{b}_i \in Tb_i, i \in I$:

$$\left| \langle \tilde{b}_k | \tilde{b}_l \rangle \right|^2 = |\langle b_k | b_l \rangle|^2 = \delta_{kl},$$

insbesondere also $\left| \langle \tilde{b}_k | \tilde{b}_k \rangle \right|^2 = 1$. Da aber für beliebige Vektoren $a \in \mathcal{H}$ das Produkt $\langle a | a \rangle$ ohnehin reell und positiv ist, gilt sogar

$$\langle \tilde{b}_k | \tilde{b}_l \rangle = \delta_{kl}.$$

Die $\{\tilde{b}_k\}$ bilden also ein Orthonormalsystem in \mathcal{H} .

(ii) *Vollständigkeit:* Sei $\tilde{a} \in \tilde{a} \subset \mathcal{H}$ ein Vektor, der senkrecht auf allen \tilde{b}_k steht. Dann gilt für einen beliebigen Vektor a aus dem Bild von \tilde{a} unter T^{-1} wegen [SII]:

$$|\langle a | b_k \rangle|^2 = \left| \langle \tilde{a} | \tilde{b}_k \rangle \right|^2 = 0 \quad \forall k \in I,$$

was wegen $\|\tilde{a}\| = 1$ im Widerspruch zur Vollständigkeit der $\{b_k\}_{k \in I}$ steht. Es kann also ein solches \tilde{a} nicht geben. □

KORROLAR IV.3. Jede zu einer Symmetrietransformation $T : S^\infty/U(1) \rightarrow S^\infty/U(1)$ kompatible Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ bildet eine ONB von \mathcal{H} auf eine ONB von \mathcal{H} ab.

BEWEIS. Eine zu T kompatible Abbildung U erfüllt

$$Ua \in Ta \quad \Leftrightarrow \quad a \in a \quad \forall a \in \mathcal{H}.$$

Die Behauptung folgt damit direkt aus Lemma IV.2. □

¹Die Existenz einer abzählbaren Orthonormalbasis zu \mathcal{H} folgt aus der Tatsache, dass der in der Quantenmechanik betrachtete Hilbertraum separabel ist (vgl. Abschnitt II.2).

FESTSTELLUNG IV.4. Eine semilineare Transformation, die eine ONB auf eine ONB abbildet, ist semiunitär.

BEWEIS. Sei also $\{b_k\}_{k \in I}$ eine ONB des Hilbertraums \mathcal{H} . Seien ferner $a = \sum_{k \in I} \alpha_k b_k$ und $b = \sum_{k \in I} \beta_k b_k$ zwei beliebige Vektoren aus \mathcal{H} und $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Körperautomorphismus. Für die Bilder von a und b unter einer semilinearen Transformation $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ gilt:

$$S(a) = \sum_{k \in I} \sigma(\alpha_k) S(b_k) \quad \text{und} \quad S(b) = \sum_{k \in I} \sigma(\beta_k) S(b_k),$$

wobei die Menge $\{S(b_k)\}_{k \in I}$ nach Voraussetzung ebenfalls eine ONB von \mathcal{H} bildet. Das Skalarprodukt von $S(a)$ und $S(b)$ lässt sich also denkbar einfach berechnen:

$$\langle S(a) | S(b) \rangle = \sum_{k, l \in I} \overline{\sigma(\alpha_k)} \sigma(\beta_l) \underbrace{\langle S(b_k) | S(b_l) \rangle}_{=\delta_{kl}} = \sigma \left(\sum_{k \in I} \overline{\alpha_k} \beta_k \right) = \sigma(\langle a | b \rangle)$$

und damit ist S semiunitär. □

KORROLAR IV.5. Eine zu einer Symmetrietransformation $T : S^\circ/U(1) \rightarrow S^\circ/U(1)$ kompatible, semilineare Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ist semiunitär.

BEWEIS. Die Aussage folgt direkt aus Korrolar IV.3 und der Feststellung IV.4. □

Nach dem Korrolar IV.5 reicht es also aus, eine zu $T : S^\circ/U(1) \rightarrow S^\circ/U(1)$ kompatible, semilineare Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ zu konstruieren, um das Wigner-Theorem zu beweisen.

KORROLAR IV.6. Sei $a = \sum_{k \in I} \alpha_k b_k \in \mathfrak{a}$ ein Vektor aus dem Einheitskreis \mathfrak{a} , und $\tilde{a} = \sum_{k \in I} \tilde{\alpha}_k \tilde{b}_k \in \mathfrak{Ta}$ ein Vektor aus dem transformierten Einheitskreis \mathfrak{Ta} , dann folgt für die Beträge der Entwicklungskoeffizienten aus der Eigenschaft [SI] der Symmetrietransformation T :

$$(19) \quad |\tilde{\alpha}_k|^2 = \left| \langle \tilde{b}_k | \tilde{a} \rangle \right|^2 = |\langle b_k | a \rangle|^2 = |\alpha_k|^2.$$

Damit lässt auch jede zu T kompatible Abbildung U die Beträge der Entwicklungskoeffizienten bei einer Entwicklung in kompatible Basen invariant.

VORSICHT. Auch wenn das Korrolar IV.6 eine Freiheit in den Phasen der Koeffizienten $\tilde{\alpha}_k$ suggeriert, so können wir die Phasen der Koeffizienten dennoch nicht alle gleichzeitig frei wählen. Die relativen Phasen der Koeffizienten eines Repräsentanten in einer vorgegebenen Basis sind bereits durch die Zugehörigkeit zu einem bestimmten Einheitskreis festgelegt. Um die Darstellung eines Repräsentanten $a \in \mathfrak{a}$ auszuwählen, reicht es aus, den Phasenfaktor eines einzigen Koeffizienten festzulegen. Alle anderen Phasen folgen dann aus der Zugehörigkeit zum selben Strahl. Schließlich unterscheiden sich zwei Repräsentanten des selben Einheitskreises, d.h. zwei normierte Repräsentanten des selben Strahls, lediglich um einen globalen Phasenfaktor (vgl. (12)).

Unsere Aufgabe ist es nun also die ohnehin gegebene Quasiunitarität, die sich in Korrolar IV.6 als Invarianz der Beträge der Entwicklungskoeffizienten zeigt, auf die beiden Spezialfälle der Unitarität ($\tilde{\alpha}_k = \alpha_k$) bzw. Antiunitarität ($\tilde{\alpha}_k = \overline{\alpha_k}$) einzuschränken. Dazu brauchen wir eine weitere Bedingung, die wir aus der geforderten Additivität für U erhalten.

2. Konstruktion nach Weinberg

Die hier vorgestellte Konstruktion von Steven Weinberg schließt (wie auch der im nächsten Kapitel vorgestellte Beweis von Valerie Bargmann) eine Lücke in dem Originalbeweis nach Wigner. Für einen weitergehenden Vergleich dieser Konstruktionen sei an dieser Stelle aber auf das folgende Kapitel (Abschnitt 3) verwiesen.

2.1. Festlegung der Phase und zweite Basis. Zunächst konstruieren wir eine Abbildung, die additiv und \mathbb{R} -homogen ist, da dies die beiden Eigenschaften sind, die lineare und antilineare Abbildungen gemeinsam haben.

Wir betrachten dazu die einfachen Linearkombinationen

$$(20) \quad c_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_1 + b_k) \quad k \neq 1$$

mit Einheitskreisen $c_k \in \mathcal{H}$. Ein beliebiger Vektor \tilde{c}_k aus dem transformierten Strahl $\mathbb{T}c_k$ lässt sich dann nach der ONB $\{\tilde{b}_l\}_{l \in I}$ entwickeln:

$$(21) \quad \tilde{c}_k = \sum_{l \in I} \tilde{\gamma}_{kl} \tilde{b}_l,$$

mit den Entwicklungskoeffizienten $\tilde{\gamma}_{kl} \in \mathbb{C}$. Das Korollar IV.6 besagt dann, dass

$$|\tilde{\gamma}_{kk}| = |\tilde{\gamma}_{k1}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und alle anderen Koeffizienten verschwinden:

$$(22) \quad \tilde{\gamma}_{kl} = 0 \quad \forall l \notin \{1, k\}.$$

Führen wir also für die Koeffizienten Phasen φ_k ein, so hat ein beliebiger Repräsentant \tilde{c}_k aus dem transformierten Strahl $\mathbb{T}c_k$ die Form:

$$(23) \quad \begin{aligned} \tilde{c}_k &= |\tilde{\gamma}_{k1}| e^{i\varphi_1} \tilde{b}_1 + |\tilde{\gamma}_{kk}| e^{i\varphi_k} \tilde{b}_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\varphi_1} \tilde{b}_1 + e^{i\varphi_k} \tilde{b}_k \right) \end{aligned}$$

Wir wollen nun eine additive, \mathbb{R} -homogene Abbildung U konstruieren, das bedeutet, wir wollen die Phasen in (23) zum Verschwinden bringen. Dazu konstruieren wir eine neue Basis von \mathcal{H} , bezüglich der wir dann die Repräsentanten in $\mathbb{T}c_k$ ausdrücken. Man beachte dabei, dass die Phasen der Koeffizienten in (23) nicht eindeutig sind. So ist beispielsweise

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\varphi_1} \tilde{b}_1 + e^{i\varphi_k} \tilde{b}_k \right) \quad \text{aber} \quad \tilde{c}_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\vartheta_1} \tilde{b}_1 + e^{i\vartheta_m} \tilde{b}_m \right)$$

für eine Richtung $m \neq k$. Um nun eine eindeutig bestimmte Basis $\{b'_l\}_{l \in I}$ von \mathcal{H} zu konstruieren, setzen wir für den ersten Vektor der Basis (völlig willkürlich):

$$\boxed{b'_1 := \tilde{b}_1}.$$

Anschließend wählen wir Repräsentanten $c'_k \in \mathbb{T}c_k$, die dadurch bestimmt sind, dass in einer Entwicklung nach der Basis $\{\tilde{b}_l\}_{l \in I}$ jeweils der Phasenfaktor bei $\tilde{b}_1 = b'_1$ verschwindet. In unserem Beispiel wird dadurch

$$c'_k := e^{-i\varphi_1} \tilde{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{b}_1 + e^{i(\varphi_k - \varphi_1)} \tilde{b}_k \right) \quad \text{und} \quad c'_m := e^{-i\vartheta_1} \tilde{c}_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{b}_1 + e^{i(\vartheta_m - \vartheta_1)} \tilde{b}_m \right).$$

Dabei sind die relativen Phasen $(\varphi_k - \varphi_1)$ und $(\vartheta_m - \vartheta_1)$ eindeutig durch die Zugehörigkeit zu dem Einheitskreis $\mathbb{T}c_k$ bzw. $\mathbb{T}c_m$ festgelegt. Wir erhalten also für $l \neq 1$ eine Menge von eindeutig bestimmten Repräsentanten $c'_l \in \mathbb{T}c_l$. Wir setzen dann

$$b'_l := \sqrt{2}c'_l - b_1 \quad \forall l \neq 1$$

und erhalten eine eindeutig bestimmte Basis $\{b'_1, b'_l\}_{l \in I \setminus \{1\}}$ von \mathcal{H} . In unserem Beispiel entspräche das der Definition:

$$b'_k := e^{i(\varphi_k - \varphi_1)} \tilde{b}_k \quad \text{und} \quad b'_m := e^{i(\vartheta_m - \vartheta_1)} \tilde{b}_m.$$

In unserer so nun eindeutig definierten Basis $\{b'_l\}_{l \in I}$ gilt dann nach Konstruktion:

$$c'_l = \frac{1}{\sqrt{2}} (b'_1 + b'_l).$$

Wir setzen

$$(24) \quad \boxed{Ub_l := b'_l} \quad \forall l \in I.$$

Es ist nun konsistent mit dieser Definition, wenn wir desweiteren

$$(25) \quad \boxed{Uc_l := c'_l} \quad \forall l \in I \setminus \{1\}$$

setzen. Wir haben dann:

$$U \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (b_1 + b_l) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (Ub_1 + Ub_l) \quad \forall l \in I \setminus \{1\}.$$

Wir haben also gesehen, dass es möglich ist, eine zu \mathbb{T} kompatible, \mathbb{R} -homogene, additive Abbildung auf \mathcal{H} zu definieren. Betrachten wir nun im nächsten Abschnitt, was aus den Bedingungen (24) und (25) für die Transformation allgemeiner Vektoren in \mathcal{H} folgt.

2.2. Die Wigner-Alternative. In diesem Abschnitt untersuchen wir nun die Wirkung des Operators U auf allgemeine Vektoren. Da wir uns also nicht wie im letzten Abschnitt auf die Transformation von Vektoren c_k mit reellen Koeffizienten beschränken, können wir hier eine Unterscheidung zwischen dem linearen und dem antilinearen Fall erwarten.

Sei also $c \in S^\infty \subset \mathcal{H}$ ein beliebiger, normierter Vektor mit zugehörigem Einheitskreis c . Dann können wir c in der Basis $\{b_k\}_{k \in I}$ entwickeln:

$$c = \sum_{k \in I} \gamma_k b_k \quad \gamma_k \in \mathbb{C}.$$

Ein beliebiger Vektor aus dem transformierten Einheitskreis $\mathbb{T}c$, nennen wir ihn c' , kann nun nach der ONB $\{Ub_k\}_{k \in I}$ entwickelt werden:

$$c' = \sum_{k \in I} \gamma'_k Ub_k.$$

Nach der Eigenschaft [SI] von \mathbb{T} gilt für diese beiden Vektoren zum einen:

$$(26) \quad \begin{aligned} |\langle b_l | c \rangle|^2 &= |\langle Ub_l | c' \rangle|^2 \\ |\gamma_l|^2 &= |\gamma'_l|^2 \quad \forall l \in I \end{aligned}$$

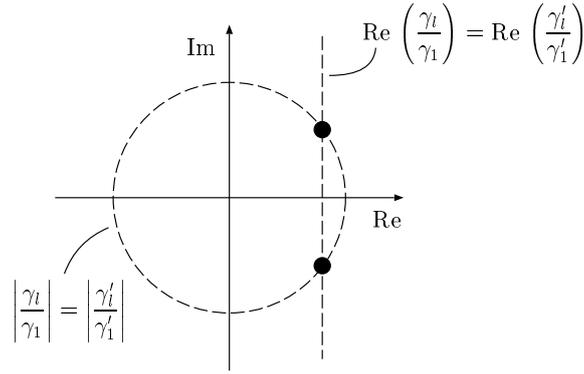


ABBILDUNG 1. Zur Veranschaulichung der Formeln (28) und (29)

und zum anderen (c_k wie in (20))

$$(27) \quad \begin{aligned} |\langle c_k | c \rangle|^2 &= |\langle U c_k | c' \rangle|^2 \\ |\gamma_1 + \gamma_k|^2 &= |\gamma'_1 + \gamma'_k|^2 \quad \forall k \in I \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Division der beiden Ergebnisse ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{|\gamma_1 + \gamma_k|^2}{|\gamma_1|^2} &= \frac{|\gamma'_1 + \gamma'_k|^2}{|\gamma'_1|^2} \\ \left| \frac{\gamma_k}{\gamma_1} + 1 \right|^2 &= \left| \frac{\gamma'_k}{\gamma'_1} + 1 \right|^2 \\ 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1}\right) + \left|\frac{\gamma_k}{\gamma_1}\right|^2 &= 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\gamma'_k}{\gamma'_1}\right) + \left|\frac{\gamma'_k}{\gamma'_1}\right|^2 \end{aligned}$$

und mit (26) folgt:

$$(28) \quad \operatorname{Re}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\gamma'_k}{\gamma'_1}\right) \quad \forall k \in I \setminus \{1\}.$$

Wiederum wegen (26) folgt hieraus (siehe Abb. 1):

$$(29) \quad \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1}\right) = \pm \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma'_k}{\gamma'_1}\right) \quad \forall k \in I \setminus \{1\}.$$

Für $k = 1$ sind beide Gleichungen trivial erfüllt, d.h. beide Gleichungen gelten für alle $k \in I$.

Die Forderung der Kompatibilität zu $\mathbb{T} : S^\infty/U(1) \rightarrow S^\infty/U(1)$ und die im Abschnitt 2.1 untersuchte Additivität und \mathbb{R} -Homogenität führen also auf:

$$(30) \quad \frac{\gamma'_k}{\gamma'_1} = \frac{\gamma_k}{\gamma_1}$$

oder

$$(31) \quad \frac{\gamma'_k}{\gamma'_1} = \overline{\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1}\right)},$$

als mögliche Transformationsgleichungen für die Koeffizienten. Wir bezeichnen Gleichungen (30) und (31) im Folgenden als *Wigner-Alternative*.

2.3. Unabhängigkeit von Koeffizienten. Nach dem Ergebnis im letzten Abschnitt könnte nun für ein $k \in I$ Gleichung (30) und für ein $l \in I, l \neq k$ Gleichung (31) Gültigkeit haben, dann wäre U weder linear noch antilinear. Wir müssen also zeigen:

FESTSTELLUNG IV.7. Es gilt entweder $\frac{\gamma'_k}{\gamma'_1} = \frac{\gamma_k}{\gamma_1}$ (30) für alle $k \in I$, oder $\frac{\gamma'_k}{\gamma'_1} = \overline{\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1}\right)}$ (31) für alle $k \in I$.

Dieser Schritt schließt die Lücke in Wigners Originalbeweis, auf die wir zu Anfang dieses Abschnitts hingewiesen hatten.

BEWEIS. Sei also $\frac{\gamma'_k}{\gamma'_1} = \frac{\gamma_k}{\gamma_1}$ für mindestens ein $k \in I$ und sei $\frac{\gamma'_l}{\gamma'_1} = \overline{\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1}\right)}$ für ein $l \in I, l \neq k$. Damit das wirklich einen Unterschied macht seien ferner $\frac{\gamma_k}{\gamma_1}, \frac{\gamma_l}{\gamma_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Wir führen diese Voraussetzung zum Widerspruch. Nehmen wir den Vektor

$$d = \frac{1}{\sqrt{3}}(b_1 + b_k + b_l) \in \mathcal{H}$$

mit Einheitskreis d . Nach (26) können sich die Koeffizienten eines beliebigen Vektors (entwickelt in der Basis $\{Ub_k\}_{k \in I}$ aus dem transformierten Einheitskreis Td von denen eines Repräsentanten aus dem untransformierten Einheitskreis nur um Phasenfaktoren $\delta_i \in U(1), i \in \{1, k, l\}$, unterscheiden. Da aus den Koeffizienten in d allerdings nur reelle Verhältnisse gebildet werden können, die sich wegen (30, 31) bei einer Transformation nicht ändern, können sich alle drei Koeffizienten höchstens um den selben Phasenfaktor $\delta (= \delta_1 = \delta_k = \delta_l)$ unterscheiden. Das heißt ein beliebiger Vektor d' aus dem transformierten Einheitskreis Td lässt sich wie folgt schreiben:

$$d' = \frac{\delta}{\sqrt{3}}(Ub_1 + Ub_k + Ub_l), \quad \delta \in U(1).$$

Die Invarianz der Übergangswahrscheinlichkeiten [SI] liefert dann:

$$(32) \quad \begin{aligned} |\langle d|c \rangle|^2 &= |\langle d'|c' \rangle|^2 \\ |\gamma_1 + \gamma_k + \gamma_l|^2 &= |\gamma'_1 + \gamma'_k + \gamma'_l|^2 \\ \left|1 + \frac{\gamma_k}{\gamma_1} + \frac{\gamma_l}{\gamma_1}\right|^2 &= \left|1 + \frac{\gamma_k}{\gamma_1} + \overline{\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1}\right)}\right|^2 \end{aligned}$$

woraus man nach einer kleinen Rechnung folgert²:

$$(33) \quad \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1}\right) \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1}\right) = 0.$$

Das bedeutet eines der beiden Koeffizientenverhältnisse muss reell sein, was aber unseren Voraussetzungen widerspricht. Damit gilt entweder (30) für alle $k \in I$ oder (31) für alle $k \in I$. \square

Abhängig davon, welchen der beiden Fälle (30, 31) wir betrachten, können wir die Phase des Vektors $Uc \in Tc$ so wählen, dass entweder $\gamma'_1 = \gamma_1$, oder $\gamma'_1 = \bar{\gamma}_1$ gilt.

BEMERKUNG. Natürlich könnten wir die Phase des Vektors Uc auch anders wählen, was aber lediglich in einem globalen Phasenfaktor $\lambda \in U(1)$ resultieren würde, den wir o.B.d.A. durch eine Substitution $U \rightarrow U' := \lambda U$ in die Transformation U hineinziehen können. Das ist Ausdruck der Nicht-Eindeutigkeit von U . Wir wählen die sogenannte globale Phase des Vektors Uc also so, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda = 1$ gilt.

²Rechnung ist im Anhang B auf Seite 85 ausgeführt.

Damit ist U für einen allgemeinen Vektor $c \in \mathcal{H}$ definiert, und es gilt entweder:

$$(34) \quad U \left(\sum_{k \in I} \gamma_k b_k \right) = \sum_{k \in I} \gamma_k (U b_k)$$

oder

$$(35) \quad U \left(\sum_{k \in I} \gamma_k b_k \right) = \sum_{k \in I} \bar{\gamma}_k (U b_k)$$

2.4. Unabhängigkeit von Vektoren. Damit U nun wirklich einen linearen oder antilinearen Operator auf \mathcal{H} definiert, muss U natürlich für alle Vektoren $a \in \mathcal{H}$ linear oder antilinear sein. Dazu müssen wir zeigen:

FESTSTELLUNG IV.8. Eine zu der Symmetrietransformation $T : S^\infty / U(1) \rightarrow S^\infty / U(1)$ kompatible, additive, \mathbb{R} -homogene Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ist entweder linear, oder antilinear (auf ganz \mathcal{H}).

Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis dieser Aussage beginnen noch einige Vorbemerkungen. Zu einer vorgegebenen, festen Transformation T kann man, dem letzten Abschnitt zu Folge, den Hilbertraum in zwei Mengen einteilen. Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ die Menge aller Vektoren, die durch (34) transformiert werden, und $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ die Menge der Vektoren, die mit (35) transformiert werden. Wir hatten gezeigt, dass es für eine zu T kompatible, additive und \mathbb{R} -homogene Abbildung U nur diese beiden Möglichkeiten gibt. Das bedeutet:

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{H}.$$

Sei nun $a := \sum_k \alpha_k b_k \in \mathcal{A}$ und $b := \sum_k \beta_k b_k \in \mathcal{B}$ ($\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$). Dann transformieren sich a und b unter der Realisierung U der Symmetrietransformation T wie folgt:

$$\begin{aligned} U \left(\sum_k \alpha_k b_k \right) &= \sum_k \alpha_k (U b_k) \in \mathcal{H} \\ U \left(\sum_k \beta_k b_k \right) &= \sum_k \bar{\beta}_k (U b_k) \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den repräsentierten Zuständen muss natürlich invariant bleiben:

$$(36) \quad \begin{aligned} |\langle b|a \rangle|^2 &= |\langle U b|U a \rangle|^2 \\ \left| \sum_k \bar{\beta}_k \alpha_k \right|^2 &= \left| \sum_k \beta_k \alpha_k \right|^2, \end{aligned}$$

und eine algebraische Umformung liefert die dazu äquivalente Bedingung:³

$$(37) \quad \sum_{kl} \text{Im}(\bar{\alpha}_k \alpha_l) \text{Im}(\bar{\beta}_k \beta_l) = 0.$$

Dies gibt Anlass zur Definition einer Indikatorfunktion

³Rechnung ausgeführt im Anhang B auf Seite 85.

DEFINITION IV.9. Bezeichnen wir mit (α_k) einen Vektor, der in der Basis $\{b_k\}_{k \in I}$ die Entwicklungskoeffizienten α_k hat, also $(\alpha_k) := \sum_{k \in I} \alpha_k b_k$, so können wir durch

$$\begin{aligned} \chi : \quad \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((\alpha_k), (\beta_k)) &\mapsto \chi((\alpha_k), (\beta_k)) := \sum_{kl} \text{Im}(\bar{\alpha}_k \alpha_l) \text{Im}(\bar{\beta}_k \beta_l) \end{aligned}$$

eine Indikatorfunktion definieren, die nach obiger Herleitung folgende Eigenschaften hat:

- $\chi((\alpha_k), (\beta_k)) \neq 0$ ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass (α_k) und (β_k) mit der selben Gleichung (34) oder (35) transformiert werden müssen, da sonst die Invarianz der Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den repräsentierten Zuständen verletzt wäre.
- Entsprechend ist $\chi((\alpha_k), (\beta_k)) = 0$ gleichbedeutend mit der Aussage, dass (α_k) und (β_k) *nicht* mit der selben Gleichung (34) oder (35) transformiert werden müssen.

Nun gibt es eine bestimmte Menge von Vektoren, für die (37), also $\chi = 0$, trivial erfüllt ist, nämlich genau solche Vektoren, deren Koeffizienten bei einer Entwicklung in die Basis $\{b_k\}_{k \in I}$ alle die gleiche Phase haben.⁴ Für solche Vektoren macht es keinen *physikalischen*, d.h. messbaren, Unterschied, ob man nun die Transformationsvorschrift (34) oder (35) anwendet. Sie bilden demnach die nicht leere Schnittmenge $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ (siehe Abbildung 2).⁵

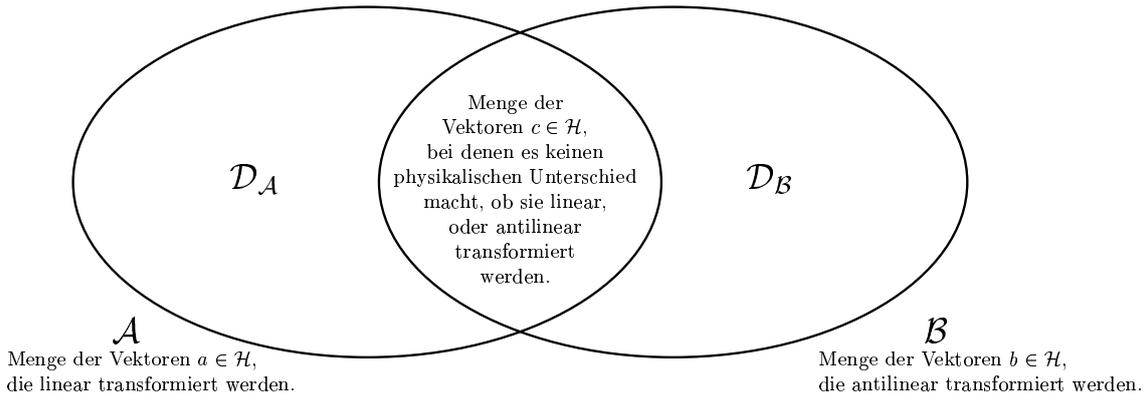


ABBILDUNG 2. Mengenverhältnisse der Vektoren in \mathcal{H} bezüglich der Transformationseigenschaften.

Im folgenden schränken wir unsere Betrachtungen auf die Menge

$$\mathcal{D} := (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \setminus (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathcal{D}_A \dot{\cup} \mathcal{D}_B$$

mit $\mathcal{D}_A := \mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ und $\mathcal{D}_B := \mathcal{B} \setminus (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ ein. Das ist möglich, da wir für Vektoren $c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine der beiden Transformationen (34/35) wählen können, ohne die Erhaltung der Übergangswahrscheinlichkeit [SI] zu verletzen.

Auf \mathcal{D} kann man nun mit Hilfe der Indikatorfunktion χ (Definition IV.9) eine Äquivalenzrelation definieren:

⁴Wenn alle $\{\alpha_k\}$ die gleiche Phase haben, so ist:

$$\bar{\alpha}_k \alpha_l = |\alpha_k| |\alpha_l| e^{-i\phi} e^{i\phi} = |\alpha_k| |\alpha_l| \in \mathbb{R},$$

also $\text{Im}(\bar{\alpha}_k \alpha_l) = 0 \quad \forall k, l$. Entsprechendes gilt für die $\{\beta_k\}$.

⁵Welche Vektoren sich in der Schnittmenge $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ befinden, hängt natürlich von der gewählten Basis ab. Schließlich hängen die Entwicklungskoeffizienten von der gewählten Basis ab.

FESTSTELLUNG IV.10. Seien $a := (\alpha_i) \in \mathcal{D}$ und $b := (\beta_i) \in \mathcal{D}$ zwei beliebige Vektoren aus \mathcal{D} . Dann wird durch

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad \chi(a, b) \neq 0$$

eine Äquivalenzrelation \sim auf \mathcal{D} definiert.

BEWEIS. Nach der Definition IV.9 ist $\chi(r, s) \neq 0$ gleichbedeutend mit der Aussage, dass r und s mit der selben Gleichung, entweder (34) oder (35), transformiert werden. Nach der Konstruktion der Mengen \mathcal{A} und \mathcal{B} ist das wiederum gleichbedeutend mit der Aussage, dass entweder $r, s \in \mathcal{A}$ oder $r, s \in \mathcal{B}$ gilt. Nun haben wir aber ohnehin $r, s \in \mathcal{D}$, demnach ist $r \sim s$ auch gleichbedeutend damit, dass entweder

$$r, s \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A} = \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \quad \text{oder} \quad r, s \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B} = \mathcal{D}_{\mathcal{B}}.$$

Man kann also die Relation \sim als Zugehörigkeit zu disjunkten Mengen ausdrücken, damit folgen sofort Reflexivität, Symmetrie und Transitivität der Relation \sim . Es handelt sich demnach um eine Äquivalenzrelation, wobei die Mengen $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ die Äquivalenzklassen dieser Relation \sim sind. \square

Nach diesen Vorüberlegungen kommen wir nun zum eigentlichen Beweis der Feststellung IV.8.

BEWEIS. Wir bemerken zunächst, dass die Feststellung IV.8 nach den obigen Vorüberlegungen gleichbedeutend ist mit der Aussage, dass zu einer festen Transformation T entweder $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \emptyset$ oder $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \emptyset$ sein muss. Ist nämlich $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \emptyset$ so ist $\mathcal{H} = \mathcal{A}$, und alle Vektoren werden mit (34) transformiert, und umgekehrt. Wir führen auch hier wieder die gegenteilige Aussage zum Widerspruch. Sei also $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ und $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \neq \emptyset$, dann gibt es Vektoren $a := (\alpha_k) \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ und $b := (\beta_k) \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$, die die Gleichung (37) nicht trivial erfüllen, und dennoch mit unterschiedlichen Realisierungen (34/35) transformiert werden. Wir können in diesem Fall allerdings einen Vektor $(\varepsilon_k) \in \mathcal{H}$ konstruieren, der gleichzeitig

$$(38) \quad \chi((\varepsilon_k), (\alpha_k)) = \sum_{kl} \text{Im}(\bar{\varepsilon}_k \varepsilon_l) \text{Im}(\bar{\alpha}_k \alpha_l) \neq 0$$

und

$$(39) \quad \chi((\varepsilon_k), (\beta_k)) = \sum_{kl} \text{Im}(\bar{\varepsilon}_k \varepsilon_l) \text{Im}(\bar{\beta}_k \beta_l) \neq 0$$

erfüllt. Aus $a \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ folgt, dass es unter den Entwicklungskoeffizienten $\{\alpha_k\}$ von a mindestens ein Paar (α_k, α_l) gibt, die unterschiedliche Phasen haben. Entsprechend folgt aus $b \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$, dass es in $\{\beta_m\}$ mindestens ein Paar (β_m, β_n) gibt, sodass β_m und β_n unterschiedliche Phasen haben.

Nehmen wir das Paar (α_k, α_l) . Offensichtlich ist $\alpha_k^* \alpha_l \notin \mathbb{R}$, und für $\beta_k^* \beta_l$ gibt es zwei Möglichkeiten:

Falls $\beta_k^* \beta_l \notin \mathbb{R}$ wählen wir $\varepsilon_i = 0 \quad \forall i \notin \{k, l\}$ und ε_k und ε_l beliebig aber mit verschiedenen Phasen. Dann sind beide Ungleichungen (38, 39) erfüllt.

Falls $\beta_k^* \beta_l \in \mathbb{R}$: so gibt es immernoch ein Paar (β_m, β_n) , sodass $\beta_m^* \beta_n \notin \mathbb{R}$, für diesen Fall sind wieder zwei Unterscheidungen zu machen:

Falls $\alpha_m^* \alpha_n \notin \mathbb{R}$ wählen wir $\varepsilon_i = 0 \quad \forall i \notin \{m, n\}$ und ε_m und ε_n mit verschiedenen Phasen. Wieder sind beide Ungleichungen (38, 39) erfüllt.

Falls $\alpha_m^* \alpha_n \in \mathbb{R}$: wählen wir $\varepsilon_i = 0 \quad \forall i \notin \{k, l, m, n\}$ und $\varepsilon_k, \varepsilon_l, \varepsilon_m$ und ε_n alle mit verschiedenen Phasen. Und auch der so gewählte Vektor $e = \sum_i \varepsilon_i b_i$ erfüllt beide Ungleichungen (38, 39).

Wir erhalten auf diese Art also immer einen Vektor $e = \sum_i \varepsilon_i b_i$, der die beiden Ungleichungen (38) und (39) gleichzeitig erfüllt.

Aus (38) folgt dann, dass $e \sim a$; aus (39) folgt, dass $e \sim b$. Aufgrund der Transitivität der Äquivalenzrelation \sim , folgt daraus $a \sim b$. Damit gilt also entweder

$$a, b \in \mathcal{D}_A \quad \text{oder} \quad a, b \in \mathcal{D}_B .$$

Das ist ein Widerspruch zu

$$a \in \mathcal{D}_A \quad \text{und} \quad b \in \mathcal{D}_B .$$

Falls es also zu einer festen Transformation T einen Vektor $a \in \mathcal{D}_A$ gibt, so ist $\mathcal{D}_B = \emptyset$ und umgekehrt. Im ersten Fall wäre dann $\mathcal{H} = \mathcal{A}$ und im zweiten $\mathcal{H} = \mathcal{B}$. \square

2.5. Schluss. Die Semilinearität der durch (24) kompatiblen Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ist damit nachgewiesen, und aus dem Korrolar IV.5 folgt dann die Semiunitarität von U , wir können dies aber auch nochmals explizit nachrechnen.

Wenden wir die Transformationsvorschrift (34) an, so ergibt sich für beliebige $a, b \in \mathcal{H}, \eta, \chi \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} U(\eta a + \chi b) &= U\left(\eta \sum_k \alpha_k b_k + \chi \sum_l \beta_l b_l\right) \\ &= U\left(\sum_k \{\eta \alpha_k + \chi \beta_k\} b_k\right) \\ &= \sum_k \{\eta \alpha_k + \chi \beta_k\} (U b_k) \\ &= \eta \sum_k \alpha_k (U b_k) + \chi \sum_k \beta_k (U b_k) \\ &= \eta (U a) + \chi (U b) , \end{aligned}$$

außerdem erhalten wir aus (34):

$$\begin{aligned} \langle U a | U b \rangle &= \left\langle U \left(\sum_k \alpha_k b_k \right) \middle| U \left(\sum_l \beta_l b_l \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_k \alpha_k (U b_k) \middle| \sum_l \beta_l (U b_l) \right\rangle \\ &= \sum_{kl} \overline{\alpha_k} \beta_l \underbrace{\langle U b_k | U b_l \rangle}_{=\delta_{kl}} \\ &= \sum_k \overline{\alpha_k} \beta_k \\ &= \langle a | b \rangle , \end{aligned}$$

das heißt U ist *unitär*.

Wenden wir hingegen die Transformationsvorschrift (35) an, so folgt zum einen:

$$\begin{aligned}
 U(\eta a + \chi b) &= U\left(\eta \sum_k \alpha_k b_k + \chi \sum_l \beta_l b_l\right) \\
 &= U\left(\sum_k \{\eta \alpha_k + \chi \beta_k\} b_k\right) \\
 &= \sum_k \overline{\{\eta \alpha_k + \chi \beta_k\}} (U b_k) \\
 &= \bar{\eta} \sum_k \bar{\alpha}_k (U b_k) + \bar{\chi} \sum_k \bar{\beta}_k (U b_k) \\
 &= \bar{\eta} (U a) + \bar{\chi} (U b),
 \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned}
 \langle U a | U b \rangle &= \left\langle U\left(\sum_k \alpha_k b_k\right) \left| U\left(\sum_l \beta_l b_l\right) \right. \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_k \bar{\alpha}_k (U b_k) \left| \sum_l \bar{\beta}_l (U b_l) \right. \right\rangle \\
 &= \sum_{kl} \alpha_k \bar{\beta}_l \langle U b_k | U b_l \rangle \\
 &= \sum_{kl} \alpha_k \bar{\beta}_l \\
 &= \overline{\langle a | b \rangle},
 \end{aligned}$$

das heißt U ist *antiunitär*.

QED

Beweis des Theorems nach Bargmann

Valentine Bargmann [Bar64] hält sich bei seinem Beweis des Wigner-Theorems weitgehend an die Konzepte des Originalbeweises von E. Wigner [Wig31, S. 251-254] und wir werden bei der Analyse des Beweises feststellen, dass auch der im letzten Kapitel vorgestellte Beweis von Steven Weinberg [Wei95b] zum Teil Ähnlichkeiten mit diesem Beweis hat. Was diese Analyse allerdings insbesondere interessant macht, sind die Ähnlichkeiten der Vorgehensweise von Bargmann (und Wigner) zu dem in Kapitel I präsentierten Beweis des Hauptsatzes der projektiven Geometrie nach Emil Artin [Art57]. Obwohl Bargmann nicht von einer projektiven Beschreibung des Wigner-Theorems ausgeht, so verwendet er offensichtlich trotzdem eine der projektiven Geometrie verwandte Argumentationsweise, ohne jedoch die Definitionen und Sätze der projektiven Geometrie zu Hilfe zu nehmen.

Das Hauptziel dieses Kapitels ist die Analyse der Struktur des Beweises von Bargmann. Es werden deshalb nach der Diskussion der Konstruktion von Valentine Bargmann in den ersten beiden Abschnitten im dritten Abschnitt die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der vier Beweise von Artin, Bargmann, Weinberg und Wigner aufgezeigt. Ein Vergleich der Beweise des Wigner-Theorems mit dem des Hauptsatzes der projektiven Geometrie wird erst dadurch möglich, dass sich das Problem der Konstruktion einer kompatiblen, semiunitären Abbildung auf das Problem der Konstruktion einer kompatiblen semilinearen Abbildung reduzieren lässt. Dies geschieht bei Weinberg und Bargmann allerdings interessanterweise aufgrund verschiedener Argumente (s.u.).

1. Vorbemerkungen

Eugen Wigner betrachtet in dem Originalbeweis des Theorems $U(1)$ -Orbits auf \mathcal{H} als Äquivalenzklassen, sagt aber explizit, dass er nur den normierten Repräsentanten eine physikalische Interpretation zuweist. Bargmann übernimmt diese Unterteilung und bezeichnet die entsprechenden Äquivalenzklassen als Strahlen ("rays", [Bar64, Abschnitt 1.1]). Diese "Bargmann-Strahlen" unterscheiden sich jedoch von den Strahlen (1), die wir aus der projektiven Geometrie kennen. Um Verwechslungen vorzubeugen, werden wir deshalb diese $U(1)$ -Orbits auf \mathcal{H} als Kreise bezeichnen. Es liegt in dieser speziellen Beschreibungsweise aber auch ein wichtiger Vorteil. Wir werden weiter unten sehen, dass man aus der Wigner-Bargmann'schen Beschreibung fast direkt den Körperautomorphismus bekommt. Wigner selbst betrachtet keinen Körperautomorphismus, er gelangt in seinen Betrachtungen, ähnlich wie Weinberg, zu der "Wigner-Alternative" (vgl. IV.2.2) und schließt dann den antiunitären Fall (letztlich weil er eine Zeitumkehr enthält) aus. Eine weitere Sache, die den hier zu diskutierenden Beweis von Bargmann von allen anderen hier vorgestellten Beweisen (den Originalbeweis von Wigner eingeschlossen) unterscheidet, ist, dass Bargmann seine gesamte Konstruktion ohne Hilbertraumbasis durchführt. Wir kommen auf diesen Punkt später noch einmal zurück, betrachten zunächst aber die Konsequenzen aus der Betrachtung von $U(1)$ - statt \mathbb{C}^\times -Orbits auf \mathcal{H} .

Kreise sind also Äquivalenzklassen der Relation

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists \mu \in U(1) : a = \mu b,$$

und wir schreiben für diese:

$$(40) \quad \mathbf{a} = [a] = \{a' \in \mathcal{H} : a' = \mu a, \mu \in U(1)\}.$$

In diesem Kapitel meinen wir mit $[a]$ grundsätzlich die Bargmann-Strahlen, und sagen es explizit dazu, wenn wir mit $[a]$ einen \mathbb{C}^\times -Orbit meinen. Es ist dann also $\mathbf{a} = [a]$ ein Element in $\mathcal{H}/U(1)$, diesen Elementen $\mathbf{a} = [a] \in \mathcal{H}/U(1)$ kann man nun eine positive Länge, einen Radius, zuordnen:

$$|\mathbf{a}| = |[a]| := \|a\|.$$

Die Definition ist sinnvoll, da die Norm der Repräsentanten eines Kreises eine wohldefinierte Funktion auf $\mathcal{H}/U(1)$ ist. Zum einen gehören Vektoren unterschiedlicher Norm in \mathcal{H} zu unterschiedlichen Äquivalenzklassen (40), und zum anderen hängt die Norm eines Vektors nicht von einem globalen Phasenfaktor vor demselben ab.

Nun kann man jeden Vektor $a \in \mathcal{H}$ als $a = \rho e$ schreiben, mit $\rho = \|a\| \in \mathbb{R}_+$ dem Radius und $e = \frac{a}{\|a\|}$ einem Einheitsvektor. Wir haben dann

$$[a] = [\rho e] = \rho [e] \quad \text{und} \quad |[\rho e]| = \rho \quad \forall \rho \in \mathbb{R}_+,$$

und insbesondere folgt auch für komplexe Faktoren $\lambda = |\lambda| e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$:

$$[a\lambda] = [a|\lambda|e^{i\varphi}] = [a|\lambda|] = [a]|\lambda| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall a \in \mathcal{H}.$$

Für den Radius $\rho = 1$ stimmen diese Kreise mit den Äquivalenzklassen bei Weinberg überein, die wir bereits in Kapitel II als Einheitskreise eingeführt hatten.

Diese Herangehensweise macht es nun möglich - und auch notwendig, die Symmetrietransformation $T : S^\infty/U(1) \rightarrow S^\infty/U(1)$, die in Kapitel III für Einheitskreise, also Bargmann-Strahlen mit Radius Eins, definiert wurden, auf Kreise mit beliebigem Radius auszuweiten.¹ Diese (fast kanonische) Erweiterung übernimmt Bargmann aus dem Originalbeweis von E. Wigner, er definiert $\mathfrak{T} : \mathcal{H}/U(1) \rightarrow \mathcal{H}/U(1)$ durch

$$\mathfrak{T}[\rho e] := \rho T[e] \quad \forall e \in S^\infty, \forall \rho \in \mathbb{R}_+$$

(vgl. [Bar64, Abschnitt 2] bzw. [Wig31, S. 251]). Wegen $[e], T[e] \in S^\infty$, und $[\rho e] = \rho [e]$ folgt daraus, dass \mathfrak{T} den Radius respektiert:

$$(41) \quad |\mathfrak{T}[a]| = |\mathfrak{T}[\rho e]| = |\rho T[e]| = \rho = |\rho [e]| = |[\rho e]| = |[a]|.$$

BEMERKUNG. Aus projektiver Sicht wird diese Verallgemeinerung dadurch gerechtfertigt, dass der Radius der Sphäre, die wir in I.1.1 bzw. II.4.1 dazu verwendet hatten, uns das "Aussehen" eines projektiven Raumes zu verdeutlichen, natürlich für das Aussehen keine Rolle spielt. Kurz gesagt gilt für jede Sphäre $S_\rho^\infty \subset \mathcal{H}$ vom Radius ρ natürlich auch:

$$\mathcal{PH} \approx S_\rho^\infty/U(1) \quad \forall \rho \in \mathbb{R}_+.$$

¹Bargmann geht von einer etwas allgemeineren Definition der Symmetrietransformation aus, er betrachtet Abbildungen zwischen zwei Vektorräumen \mathcal{H} und \mathcal{H}' , und geht deshalb nur von einer injektiven Abbildung aus. Wir wählen hier allerdings $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ und setzen Bijektivität voraus, was für die konzeptuellen Überlegungen, die wir in diesem Kapitel anstellen wollen, aber keine wesentliche Einschränkung ist.

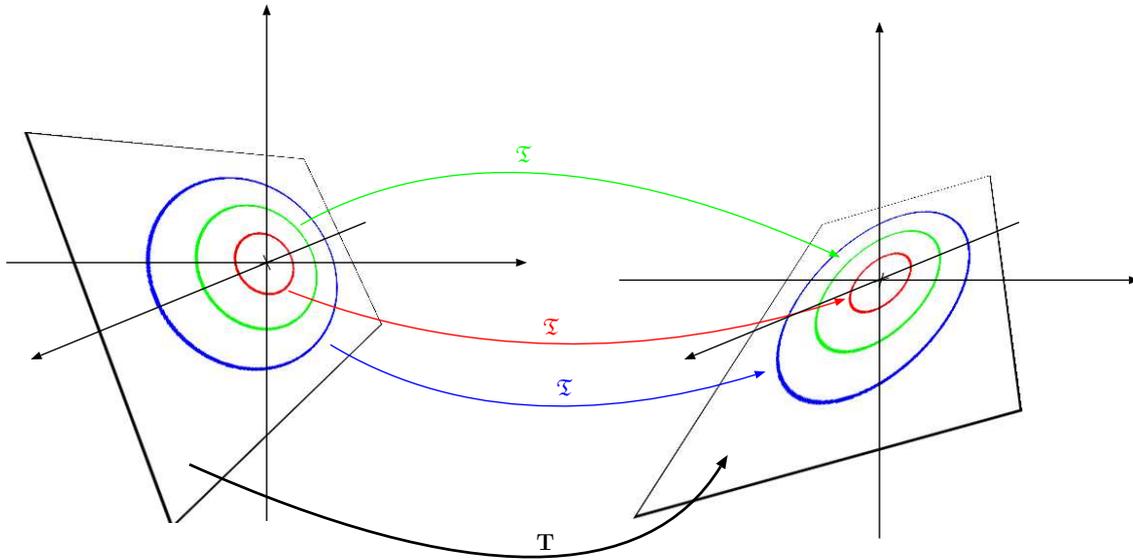


ABBILDUNG 1. Der komplexe Strahl, hier dargestellt als zweidimensionale reelle Ebene, wird bei Wigner (und Bargmann) in kleinere Äquivalenzklassen (Kreise) unterteilt. Die "radiustreue", verallgemeinerte Abbildung $\mathfrak{T} : \mathcal{H}/U(1) \rightarrow \mathcal{H}/U(1)$ respektiert diese Äquivalenzklassen.

Bargmann betrachtet also, wie auch Wigner selbst, alle diese Sphären gleichzeitig, und erhält daraus eine "radiustreue" Abbildung $\mathfrak{T} : \mathcal{H}/U(1) \rightarrow \mathcal{H}/U(1)$ (siehe Abbildung 1).

Nehmen wir also eine zu \mathfrak{T} bezüglich der Äquivalenzklassen (40) kompatible Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, also

$$\mathfrak{T}[a] = [Ua] \quad \forall a \in \mathcal{H},$$

so ist diese wegen der speziellen Konstruktion bereits normtreu (vgl. (41)):²

$$(42) \quad \|Ua\| = |[Ua]| = |\mathfrak{T}[a]| = |[a]| = \|a\|$$

(vgl. [Bar64, Gl. 8]). Hierin liegt nun die Ursache, warum sich Bargmann, wie Weinberg, auf die Konstruktion einer semilinearen Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ beschränken darf. Schließlich ist eine normtreue, semilineare Abbildung bereits semiunitär.³

Die Wigner-Bargmann'sche Sichtweise hat nun, wie bereits angesprochen, den Vorteil, dass hier eine Körperabbildung $\sigma_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gleich mitgeliefert wird, es ist nämlich

$$[U(a\lambda)] = \mathfrak{T}[a\lambda] = \mathfrak{T}[a|\lambda] = \mathfrak{T}[a]|\lambda = [Ua]|\lambda = [Ua|\lambda] \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

²Definieren wir auf \mathcal{H} durch

$$d(a, b) := \|a - b\|$$

eine Metrik, so drückt Gleichung (42) insbesondere aus, dass jede zu \mathfrak{T} kompatible Abbildung eine *Isometrie* auf \mathcal{H} ist.

³Man beachte die unterschiedlichen Sichtweisen. Weinberg konnte sich auf die Konstruktion einer semilinearen Abbildung beschränken, da er wusste, dass jede zu T kompatible Abbildung eine ONB auf eine ONB abbildet, und demnach jede kompatible, semilineare Abbildung bereits semiunitär ist (vgl. Korollar IV.5). Für Bargmann folgt das selbe aus der Normtreue einer beliebigen zu \mathfrak{T} kompatiblen Abbildung.

und demnach gibt es einen Phasenfaktor $e^{i\varphi} \in U(1)$, sodass

$$U(a\lambda) = Ua |\lambda| e^{i\varphi(a,\lambda)}.$$

Wir haben demnach die folgende:

FESTSTELLUNG V.1. Zu einer beliebigen, kompatiblen Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ (für die die Bilder $Ua \in \mathcal{H}$ natürlich schon festgelegt sind) gibt es eine Körperabbildung $\sigma_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die von der Abbildung U durch die Gleichung

$$U(a\lambda) = (Ua) \sigma_a(\lambda) \quad \forall a \in \mathcal{H}$$

festgelegt ist.^a

Einige der Eigenschaften von $\sigma_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ können wir daraus unter Berücksichtigung der Normtreue (42) direkt ablesen:

$$(43) \quad \sigma_a(0) = 0, \quad \sigma_a(1) = 1 \quad \text{und} \quad |\sigma_a(\lambda)| = |\lambda| \quad \forall a \in \mathcal{H}$$

(vgl. [Bar64, Gl. 8a]).

^aFür den obigen Fall wäre also $\sigma_a(\lambda) := |\lambda| e^{i\varphi(a,\lambda)}$.

Von der Körperabbildung $\sigma_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ muss später dann noch gezeigt werden, dass sie tatsächlich ein Körperautomorphismus ist (siehe 2.2).

Wir müssen nun noch sagen, wie die Erhaltung der Übergangswahrscheinlichkeit, ausgedrückt durch die Invarianz unter der Abbildung $\odot : S^\infty/U(1) \times S^\infty/U(1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ für die Kreise aussieht. Seien $a = \rho e_a$ und $b = \tau e_b$, wir definieren:

$$[a] \odot [b] = [\rho e_a] \odot [\tau e_b] := \rho\tau ([e_a] \odot [e_b]) \quad \forall \rho, \tau \in \mathbb{R}_+,$$

und erhalten die Verallgemeinerung $\odot : \mathcal{H}/U(1) \times \mathcal{H}/U(1) \rightarrow \mathbb{R}_+$, die wir mit dem selben Symbol bezeichnen. Es folgt direkt, dass die verallgemeinerte Symmetrie \mathfrak{T} diese Struktur respektiert:

$$\mathfrak{T}[\rho e_a] \odot \mathfrak{T}[\tau e_b] = \rho\tau (\mathfrak{T}[e_a] \odot \mathfrak{T}[e_b]) = \rho\tau ([e_a] \odot [e_b]) = [\rho e_a] \odot [\tau e_b] \quad \begin{array}{l} \forall \rho, \tau \in \mathbb{R}_+ \\ \forall e_a, e_b \in S^\infty \end{array},$$

also

$$(44) \quad \mathfrak{T}[a] \odot \mathfrak{T}[b] = [a] \odot [b] \quad \forall a, b \in \mathcal{H}.$$

Schreiben wir diese Gleichung auf der Stufe der Repräsentanten, so gilt:

$$[a] \odot [b] = \rho\tau ([e_a] \odot [e_b]) = \rho\tau |\langle e_a | e_b \rangle| = |\langle \rho e_a | \tau e_b \rangle| = |\langle a | b \rangle| \quad \forall \rho, \tau \in \mathbb{R}_+,$$

und somit

$$(45) \quad |\langle a' | b' \rangle| = |\langle a | b \rangle| \quad \forall a' \in \mathfrak{T}[a], b' \in \mathfrak{T}[b].$$

Für spätere Referenzen zitieren wir an dieser Stelle noch das in [Bar64, Abschnitt 3.1] bewiesene Lemma. Es ist das Analogon zu Korollar IV.6 bei Weinbergs Beweis.

LEMMA V.2. Seien $\{\mathfrak{f}_k\}$, mit $k \in \{1, \dots, m\}$, m orthonormale Einheitskreise, das bedeutet

$$\mathfrak{f}_k \odot \mathfrak{f}_l = \delta_{kl}.$$

Dann bilden beliebige Vektoren $f_k \in \mathfrak{f}_k$ und $f'_k \in \mathfrak{T}\mathfrak{f}_k$ jeweils ein Orthonormalsystem, d.h.

$$\langle f_k | f_l \rangle = \delta_{kl} \quad \text{und} \quad \langle f'_k | f'_l \rangle = \delta_{kl}.$$

Sei nun ferner $a = \sum_{k=1}^m \alpha_k f_k \in \mathcal{H}$. Dann hat ein beliebiger Vektor $a' \in \mathfrak{T}[a]$ eine Darstellung als:

$$a' = \sum_{k=1}^m \alpha'_k f'_k \quad \text{mit} \quad |\alpha'_k| = |\alpha_k|.$$

BEWEIS. ⁴ Der erste Teil der Aussage folgt wie im ersten Teil des Beweises von IV.2 aus der Quasiunitarität von $\mathfrak{T}|_{S^\infty} = \mathbb{T}$, und aus der Tatsache, dass $\langle a | a \rangle \in \mathbb{R}_+ \forall a \in \mathcal{H}$ (vgl. auch Lemma IV.2). Der Beweis des zweiten Teils kann sehr kurz gefasst werden, er folgt sofort aus Gleichung (45):

$$|\alpha'_k| = |\langle f'_k | a' \rangle| = |\langle f'_k | a' \rangle| = |\alpha_k|.$$

□

2. Konstruktion nach Bargmann

Betrachten wir nun die Konstruktion der zu $\mathfrak{T} : \mathcal{H}/U(1) \rightarrow \mathcal{H}/U(1)$ kompatiblen, semilinearen Abbildung, wie sie von Bargmann geführt wird.

2.1. Festlegung der Phase. Wir wählen einen beliebigen, dann aber für die weitere Konstruktion festen Einheitsvektors $e \in \mathcal{H}$ und einen Vektor $e' \in \mathfrak{T}[e]$, und legen fest, dass der normierte Vektor e' das Bild von e unter der zu konstruierenden kompatiblen Abbildung U sei

$$(A) \quad \boxed{Ue := e'}$$

(vgl. [Bar64, Gl. A]). Dann betrachten wir, was daraus für die Abbildung der Vektoren im orthogonalen Komplement e^\perp von e folgt.⁵ Wir betrachten dazu Vektoren der Form $a = e + z$ mit $z \in e^\perp$. Sei $\mathfrak{a} = [a] \subset \mathcal{H}$ der zugehörige $U(1)$ -Orbit. Wir definieren $f := \frac{z}{\|z\|}$ und erhalten ein Orthonormalsystem $\{e, f\}$ wie in Lemma V.2. Sei dann $f' \in \mathfrak{T}[f]$ ein normierter Repräsentant (vgl. (41)) des transformierten Kreises. Dann lässt sich nach dem Lemma V.2 ein beliebiger Vektor aus dem Bildkreis $\mathfrak{T}\mathfrak{a}$ in der Form:

$$\alpha' Ue + \beta' f' \in \mathfrak{T}\mathfrak{a} \quad \text{mit} \quad |\alpha'| = 1, |\beta'| = \|z\|.$$

schreiben. Der Vektor $Ue + (\alpha')^{-1} \beta' f'$ ist ein Element des selben Kreises. Im Gegensatz zum ersten ist dieser aber eindeutig bestimmt. Zum einen liegt die relative Phase der beiden Summanden durch die Zugehörigkeit zu dem Kreis $\mathfrak{T}\mathfrak{a}$ fest, und zum anderen haben wir die globale Phase

⁴Bargmann zeigt das Lemma auf recht kompliziertem Weg, wie präsentieren deshalb hier einen kürzeren Beweis.

⁵Wir verwenden hier, anders als Bargmann, das Symbol e^\perp für das orthogonale Komplement des von e aufgespannten eindimensionalen Unterraums von \mathcal{H} .

so gewählt, dass der erste Summand die Phase des bereits festgelegten Vektors $e' = Ue$ hat. Wir können demnach das Bild von a unter der zu konstruierenden Abbildung U als

$$Ua := Ue + (\alpha')^{-1} \beta' f$$

wählen. Da diese Konstruktion für beliebige $z \in e^\perp$ auf ein eindeutiges Ergebnis $e + z \mapsto U(e + z)$ führt, definiert dies eine Abbildung $V : e^\perp \rightarrow e^\perp$ mit $Vz := (\alpha')^{-1} \beta'$. Für Vektoren der Form $e + z$ ist U dann eine additive Abbildung:

$$(B) \quad \boxed{U(e + z) := Ue + Vz \quad \forall z \in e^\perp}$$

$$(C) \quad \boxed{Uz := Vz \quad \forall z \in e^\perp}$$

(vgl. [Bar64, Gl. B,C]).

An dieser Stelle sei nun nochmals darauf hingewiesen, dass sich Bargmann während der gesamten Konstruktion von U auf keine Basis in \mathcal{H} festlegt. Die Grundidee ist dabei die folgende. Wählen wir eine beliebige Richtung e in \mathcal{H} , dann lässt sich jeder Vektor $a \in \mathcal{H}$, auch wenn er nicht in dieser Richtung liegt, durch eine Linearkombination aus zwei Vektoren ausdrücken:

$$a = \alpha e + z,$$

mit einem günstig gewählten $z \in e^\perp$. Kurz gesagt spannen die beiden Vektoren $\{e, a\}$ einen zweidimensionalen Unterraum von \mathcal{H} auf, in dem man mittels des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens ein Orthogonalsystem $\{e, z\}$ konstruieren kann, in dem sich jeder weitere Vektor dieser Ebene, also insbesondere auch a , darstellen lässt. Hier ist beispielsweise $\alpha = \langle e|a \rangle$ und $z = a - \langle e|a \rangle e$. Den Fall $\alpha = 1$ haben wir oben bereits behandelt. Nun betrachtet Bargmann den Fall $\alpha = 0$, also die Abbildung $V \equiv U|_{e^\perp}$ auf dem orthogonalen Komplement zu e .

2.2. Die Abbildung auf dem orthogonalen Komplement. Sei nun die Abbildung

$$V : e^\perp \rightarrow (e')^\perp$$

durch die Konstruktion im letzten Abschnitt festgelegt. Bargmann zeigt die Eigenschaften dieser Abbildung auch wieder nur für Linearkombinationen aus zwei Vektoren, wie oben für \mathcal{H} legt Bargmann nun auch in e^\perp einen normierten Vektor $f_1 \in e^\perp$ fest, jeder weitere Vektor $b \in e^\perp$ lässt sich dann wieder als Linearkombination

$$b = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$$

mit geeignetem gewähltem $f_2 \in e^\perp$ schreiben (vgl. [Bar64, Abschnitt 4.3]). Nun haben wir die Abbildung $U|_{e^\perp} \equiv V : e^\perp \rightarrow (e')^\perp$ bereits im letzten Abschnitt festgelegt, und können die Feststellung V.1 für die Abbildung V auf dem Hilbertraum e^\perp anwenden. Es gibt dann also eine Körperabbildung $\sigma_b : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die durch

$$(46) \quad V(b\lambda) = (Vb)\sigma_b(\lambda) \quad \forall b \in e^\perp$$

festgelegt ist,⁶ und zusätzlich die Eigenschaften (43) hat (vgl. [Bar64, Gl. 14]).

⁶Für die beiden Abbildungen σ_{f_1} und σ_{f_2} werden wir, analog zu Bargmann die Abkürzungen σ_1 bzw. σ_2 verwenden.

Als erstes rechnet Bargmann nach, dass es sich bei σ_b wirklich um einen Körperautomorphismus handelt. Da er sich auf den Körper der komplexen Zahlen beschränkt, ist das am einfachsten möglich, indem man nachweist, dass σ_b entweder die Identität id oder die komplexe Konjugation $\bar{\text{id}}$ ist. Wegen der Quasiunitarität (45) einer beliebigen kompatiblen Abbildung gilt nun

$$(47) \quad |\langle Vw|Vx \rangle|^2 = |\langle w|x \rangle|^2 \quad \forall w, x \in e^\perp,$$

und insbesondere folgt aus (B):

$$(48) \quad |\langle e' + Vw|e' + Vx \rangle|^2 = |\langle e + w|e + x \rangle|^2 \quad \forall w, x \in e^\perp.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man analog zu der Herleitung der Wigner-Alternative bei Weinberg (vgl. Formeln (26) und (27)) bereits das gewünschte Ergebnis:

$$\begin{aligned} |\langle e' + Vw|e' + Vx \rangle|^2 &= |\langle e + w|e + x \rangle|^2 \\ |1 + \langle Vw|Vx \rangle|^2 &= |1 + \langle w|x \rangle|^2 \\ 1 + 2\text{Re}(\langle Vw|Vx \rangle) + |\langle Vw|Vx \rangle|^2 &= 1 + 2\text{Re}(\langle w|x \rangle) + |\langle w|x \rangle|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$(49) \quad \text{Re}(\langle Vw|Vx \rangle) = \text{Re}(\langle w|x \rangle) \quad \forall w, x \in e^\perp.$$

Aus (47) und (49) überlegt man sich dann leicht (vgl. Abbildung 1 in Kapitel IV), dass

$$(50) \quad \langle Vw|Vx \rangle = \langle w|x \rangle \quad \text{falls } \langle w|x \rangle \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir nun speziell $w = \alpha f_k$ und $x = \beta f_k$ ($k \in \{1, 2\}$), so folgt wegen (46):

$$(51) \quad \begin{aligned} \text{Re}(\langle V(\alpha f_k)|V(\beta f_k) \rangle) &= \text{Re}(\langle \alpha f_k|\beta f_k \rangle) \\ \text{Re}(\overline{\sigma_k(\alpha)}\sigma_k(\beta)) &= \text{Re}(\bar{\alpha}\beta) \end{aligned}$$

und wegen (43) folgt daraus für $\alpha = 1$:

$$(52) \quad \text{Re}(\sigma_k(\beta)) = \text{Re}(\beta) \quad \forall \beta \in \mathbb{C}$$

(vgl. [Bar64, Gl. 15a]).

Aus der Invarianz des Betrages unter σ_k (43) und der Invarianz des Realteils (52) folgt dann sofort⁷

$$\sigma_k(\beta) = \beta \quad \text{oder} \quad \sigma_k(\beta) = \bar{\beta} \quad \forall \beta \in \mathbb{C},$$

also:

$$(53) \quad \sigma_k = \text{id} \quad \text{oder} \quad \sigma_k = \bar{\text{id}}$$

(vgl. [Bar64, Gl. 17]). Damit ist also nachgewiesen, dass es sich bei σ_k tatsächlich um einen Körperautomorphismus handelt. Gleichung (53) entspricht der Wigner-Alternative (30)/(31).

Da nun Bargmann die Wigner-Alternative nicht wie Weinberg direkt aus den Linearkombinationen, sondern aus der Erweiterung der Symmetrietransformation erhält, muss er noch zeigen,

⁷Bargmann zeigt das etwas umständlich in Abschnitt 4.6, man sieht das aber sehr schnell anhand von Abbildung 1 im vorigen Kapitel IV ein.

dass sich die Koeffizienten einer Linearkombination in f_1 und f_2 tatsächlich mit σ_k transformieren, dass also

$$(54) \quad V \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k f_k \right) = \sum_{k=1}^2 \sigma_k(\alpha_k) V f_k .$$

BEWEIS. Der Fall $\alpha_k = 0$ ist trivial, sei also $\alpha_k \neq 0$. Sei nun $x = \sum_{k=1}^2 \alpha_k f_k$, dann ist nach dem Lemma $Vx = \sum_{k=1}^2 \alpha'_k V f_k$ und die Koeffizienten α'_k erhalten wir aus folgender Überlegung, es ist:

$$\langle \overline{\alpha_k}^{-1} f_k | x \rangle = \langle \overline{\alpha_k}^{-1} f_k | \alpha_k f_k \rangle = 1 \in \mathbb{R} . \quad \text{keine Summation!}$$

und aus (50) folgt dann:

$$1 = \langle V(\overline{\alpha_k}^{-1} f_k) | Vx \rangle = \langle \sigma_k(\overline{\alpha_k}^{-1}) V f_k | \alpha'_k V f_k \rangle = \sigma_k(\alpha_k^{-1}) \alpha'_k ,$$

also aufgrund von $\sigma_k(\alpha_k^{-1}) = (\sigma_k(\alpha_k))^{-1}$ (53):

$$\alpha'_k = \sigma_k(\alpha_k) .$$

□

Nun muss noch nachgewiesen werden, dass

$$(55) \quad \sigma_1 = \sigma_2 .$$

BEWEIS. Sei dazu $w = f_1 + f_2$, dann folgt aus (54) und $\sigma_k(1) = 1$ (43), dass

$$Vw = V(f_1 + f_2) = V f_1 + V f_2 ,$$

ferner ist

$$\begin{aligned} V(\alpha w) &= V(\alpha f_1 + \alpha f_2) \\ \sigma_w(\alpha) Vw &= \sigma_1(\alpha) V f_1 + \sigma_2(\alpha) V f_2 \\ \sigma_w(\alpha) (V f_1 + V f_2) &= \sigma_1(\alpha) V f_1 + \sigma_2(\alpha) V f_2 \end{aligned}$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert $\sigma_1(\alpha) = \sigma_w(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$. Als Ergebnis erhält man also:

$$V \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k f_k \right) = \sum_{k=1}^2 \sigma(\alpha_k) f_k$$

(vgl. [Bar64, Gl. 16]) mit $\sigma := \sigma_1$.

□

Man kann nun wegen (53) aus den Eigenschaften der komplexen Konjugation folgern, dass

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha + \beta) &= \sigma(\alpha) + \sigma(\beta) \\ \sigma(\alpha\beta) &= \sigma(\alpha)\sigma(\beta) \\ \overline{\sigma(\alpha)} &= \sigma(\overline{\alpha}) , \end{aligned}$$

und erhält daraus die Semiunitarität für $V : e^\perp \rightarrow (e')^\perp$:

$$(56) \quad \begin{aligned} V(y + z) &= V y + V z \\ V(\lambda z) &= \sigma(\lambda) V z \\ \langle V y | V z \rangle &= \sigma(\langle y | z \rangle) . \end{aligned}$$

(vgl. [Bar64, Gl. 18])

2.3. Rückschluss auf \mathcal{H} . Die Transformation eines allgemeinen Vektors $a = \alpha e + z \in \mathcal{H}$ wird für $\alpha \neq 0$ durch Gleichung (C) beschrieben und ist nach (56) bereits semilinear. Sei also $\alpha \neq 0$. Dann ist nach Gleichung (B) und (56):

$$U(\alpha^{-1}a) = U(e + \alpha^{-1}z) = Ue + V(\alpha^{-1}z) = Ue + \sigma(\alpha^{-1})Vz.$$

Nun gilt für die komplexe Konjugation, und für die Identität ohnehin: $\sigma(\alpha^{-1}) = \sigma(\alpha)^{-1}$, demnach können wir die obige Gleichung also mit $\sigma(\alpha)$ multiplizieren und erhalten wegen $|\sigma(\alpha)| = |\alpha|$ (43) ein Element in $\mathfrak{T}[a]$, das wir als Bild von a unter der kompatiblen Abbildung U definieren:

$$(D) \quad \boxed{Ua = U(\alpha e + z) := \sigma(\alpha)Ue + Vz}.$$

(vgl. [Bar64, Gl. D])

Von der so definierten Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ rechnet man mit Hilfe der definierenden Gleichungen (A), (B), (C) und (D) nach, dass sie für $\sigma = \text{id}$ unitär und für $\sigma = \overline{\text{id}}$ antiunitär ist. Das Wigner-Theorem ist damit also bewiesen.

Ein Kritikpunkt an der Konstruktion von Bargmann ist, dass man nun zwar in der Lage ist, die Semiunitarität von $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ für beliebige Vektoren $a \in \mathcal{H}$, die in der Form $a = \alpha e + z$ ($z \in e^\perp$) gegeben sind, nachzuweisen, dass man aber auf der anderen Seite aus einer gegebenen Fourierentwicklung

$$(57) \quad a = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k b_k$$

in einer Hilbertraumbasis $\{b_k\}_{k \in I}$ mit den Formeln (A), (B), (C) und (D) nicht ohne weiteres eine Fourierentwicklung des Bildes in der Form

$$Ua = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha'_k U b_k$$

ablesen kann, wie das beispielsweise bei dem Beweis von Weinberg der Fall ist. Bargmann geht hier wohl davon aus, dass der Schritt zu abzählbaren Summen ein kleiner ist, da die Konvergenz der Bilder unter U bereits durch das Lemma V.2 sichergestellt ist. Wir werden diesen Schritt explizit in Kapitel VI durchführen. Dort brauchen wir ihn bei der Verallgemeinerung des Hauptsatzes der projektiven Geometrie auf projektive Hilberträume, um von den endlichen auf abzählbare Summen überzugehen (siehe Abschnitt VI.2).

3. Vergleich der Beweise

Neben der Betrachtung von $U(1)$ -Orbits, die Bargmann aus dem Originalbeweis übernimmt, und die, wie wir gesehen haben von essenzieller Bedeutung für seine Konstruktion ist, ist der augenscheinlichste Unterschied des Beweises von V. Bargmann zu allen anderen Beweisen (von Weinberg, Wigner und zum Beweis des Hauptsatzes der projektiven Geometrie von E. Artin), dass Bargmanns Konstruktion offensichtlich ohne die Wahl einer festen (Hilbertraum-) Basis auskommt. Es ist aber auch gerade diese spezielle Vorgehensweise, die die Ähnlichkeit zu dem Beweis des Hauptsatzes der projektiven Geometrie von E. Artin deutlich werden lässt.

Um nun etwas konkreter zu werden, betrachten wir den ersten Schritt von Bargmann, die Festlegung des Bildes *eines* Vektors in (A), was letztlich auf die Wahl einer globalen Phase, und damit auf die Festlegung der Abbildung in e^\perp hinausläuft. Diesen Schritt müssen natürlich auch die beiden anderen Beweise machen. Artin legt mit $v_0 \mapsto w_0$ das Bild eines Basisvektors fest und erhält aus der Additivität dann die Länge aller anderen Basisvektoren des Bildraums, (vgl. Schritt (ii) seines Beweises in Abschnitt I.3 der vorliegenden Arbeit). Weinberg wählt $b_1 \mapsto b'_1$ und legt dann ebenfalls unter Ausnutzung der Additivität die Basis des Bildraumes vollkommen fest, (vgl. IV.2.1). Nun beginnt Bargmann die Analyse der Abbildung auf dem orthogonalen Komplement, er erhält aus der Transformation des Vektors $e + z$ ($z \in e^\perp$) und der festgelegten Abbildung V auf e^\perp alle Informationen über den Körperautomorphismus σ . Die Analogie zu den Schritten (iv) und (v) bei Artins Beweis ist fast offensichtlich. Artin betrachtet dort einen allgemeinen Strahl $[\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n]$ aus dem Komplement von v_0 und erhält daraus und aus der Transformation von $[v_0 + \lambda_i v_i]$ alle Eigenschaften des Körperautomorphismus. In beiden Beweisen wird dann im letzten Schritt, (vii) bei Artin und Abschnitt 2.3 bei Bargmann, auf exakt die selbe Weise auf den gesamten Raum zurückgeschlossen.

Die Art der Analyse des Körperautomorphismus hat dabei mehr Ähnlichkeit zu der entsprechenden Analyse bei Weinberg (vgl. IV.2.2). Beide (Weinberg und Bargmann) gehen direkt von dem Körper der komplexen Zahlen aus, und erhalten beide mit sehr ähnlichen Argumenten die Wigneralternative (vgl. (26)+(27) \rightarrow (30)/(31) bei Weinberg und (47)+(48) \rightarrow (53) bei Bargmann). Artin bleibt hier allgemeiner und erhält konsequenterweise auch einen allgemeinen Körperautomorphismus.

Der Vollständigkeit halber sei hier bemerkt, dass der Originalbeweis von Wigner eine Lücke aufweist. Wigner zeigt nicht, dass die beiden Möglichkeiten (hier mit Wigner-Alternative bezeichnet) unabhängig von den Koeffizienten gilt. Weinberg schließt diese Lücke in Abschnitt IV.2.3; Bargmann zeigt die Unabhängigkeit von den Koeffizienten indem er Gleichung (55) beweist.

Die Unabhängigkeit von den Vektoren, die wir nach dem Vorbild von Weinberg in Abschnitt IV.2.4 diskutiert und bewiesen haben, braucht Wigner in seinem Beweis nicht zu betrachten, da er nur solche Transformationen betrachtet, die die Zeitrichtung respektieren. Wigner kann auf diese Weise den antiunitären Fall ausschließen und betrachtet nur den unitären. Bargmann definiert - ähnlich zu Weinberg- eine Indikatorfunktion, um die Unabhängigkeit von den Vektoren nochmals deutlich zu machen. Für einen Vergleich der beiden Funktionen sei an dieser Stelle aber auf den Anhang C verwiesen.

Es lässt sich also sagen, dass die Struktur des Beweises des Wigner-Theorems von V. Bargmann und damit auch die des Originalbeweises dem Beweis des Hauptsatzes der projektiven Geometrie sehr ähneln, was läge also näher, als zu versuchen beide zu verbinden, bzw. die Aussage aus dem Hauptsatz der projektiven Geometrie auszunutzen, um das Wigner-Theorem zu beweisen. Hierum wollen wir uns in dem folgenden Kapitel kümmern.

Wigner-Theorem und Hauptsatz der projektiven Geometrie

Wie bereits angekündigt, wollen wir in diesem Kapitel zeigen, dass das Wigner-Theorem, das wir nun bereits in den letzten beiden Kapiteln bewiesen haben, eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der projektiven Geometrie auf projektive Hilberträume ist. Zentral ist dabei der Kollineationssatz VI.1, den wir im ersten Abschnitt dieses Kapitels beweisen, und der letztlich eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der projektiven Geometrie auf beliebigdimensionale Hilberträume möglich macht. Die Vorgehensweise ist dabei wie folgt.

Der Kollineationssatz besagt, dass jede Abbildung zwischen projektiven Hilberträumen, die die zusätzliche Struktur $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R}_+$ respektiert, eine Kollineation ist. Insbesondere folgt daraus dann, dass jede Symmetrietransformation eine Kollineation ist, und zusammen mit dem Hauptsatz der projektiven Geometrie folgt das Wigner-Theorem für endlichdimensionale Hilberträume (vgl. Korollar VI.3).¹ Im zweiten Abschnitt des Kapitels können wir dann den Hauptsatz der projektiven Geometrie auf beliebigdimensionale projektive Hilberträume verallgemeinern, zumindest, wenn wir nur solche Kollineationen betrachten, die aus der Invarianz der \mathcal{PH} -Struktur \odot kommen. Eine direkte Folge dieses verallgemeinerten Hauptsatzes ist dann das Theorem von E. Wigner für beliebigdimensionale Hilberträume (vgl. Korollar VI.5).

1. Der Kollineationssatz und die Invarianz der \mathcal{PH} -Struktur

Für beliebigdimensionale projektive Hilberträume gilt:

THEOREM VI.1 (Kollineationssatz). *Jede bijektive, quasiunitäre Abbildung zwischen projektiven Hilberträumen, d.h. jede bijektive Abbildung $\mathbf{K} : \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$, die die innere Struktur $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R}$ invariant lässt:*

$$\mathbf{K}\mathbf{a} \odot \mathbf{K}\mathbf{b} = \mathbf{a} \odot \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{PH},$$

ist eine Kollineation.

BEWEIS. Bezeichne $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ eine projektive Gerade in \mathcal{PH} , dann können wir $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit so wählen, dass

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = 0.$$

Durch die relative Lage der beiden Strahlen \mathbf{a} und \mathbf{b} wird (solange \mathbf{a} und \mathbf{b} projektiv unabhängig sind) schließlich nicht die aufgespannte Bündelebene (= projektive Gerade) verändert.

Nun wählen wir eine orthogonale Basis (OGB) $\mathcal{B} = \{b_k\}_{k \in I}$ von \mathcal{H} so, dass $b_1 \in \mathbf{a}$ und $b_2 \in \mathbf{b}$. Dann hat ein beliebiger Repräsentant $\mathbf{c} \in \mathbf{c}$, mit $\mathbf{c} \in \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ einem projektiven Punkt auf $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$, eine

¹Man beachte, dass Bargmann in seinem Beweis überhaupt nur endliche Linearkombinationen von Vektoren betrachtet. Wir könnten also bereits an dieser Stelle das Wigner-Theorem als bewiesen betrachten. Der zweite Teil des Kapitels besteht folglich im Wesentlichen aus einem Konvergenzbeweis.

Darstellung als:

$$c = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 \quad \gamma_i \in \mathbb{C}.$$

Wir erhalten nun eine zweite OGB $\mathcal{B}' = \{b'_k\}_{k \in I}$ von \mathcal{H} indem wir die erste mit \mathbf{K} abbilden. Die Orthogonalität folgt dabei aus der Invarianz von \odot :

$$\delta_{kl} = \frac{|\langle b_k | b_l \rangle|^2}{\langle b_k | b_k \rangle \langle b_l | b_l \rangle} = \mathbf{b}_k \odot \mathbf{b}_l = \mathbf{Kb}_k \odot \mathbf{Kb}_l = \frac{|\langle b'_k | b'_l \rangle|^2}{\langle b'_k | b'_k \rangle \langle b'_l | b'_l \rangle},$$

und wegen der Bijektivität von \mathbf{K} hat jeder Basisvektor in \mathcal{B} genau ein Bild in \mathcal{B}' . \mathcal{B}' ist also ebenso mächtig wie \mathcal{B} und damit auch eine Basis von \mathcal{H} . Wegen $0 < \mathbf{b}_k \odot \mathbf{b}_k = \mathbf{Kb}_k \odot \mathbf{Kb}_k$ wird im Übrigen auch keiner der Basisvektoren in \mathcal{B} auf den Nullvektor abgebildet.

Ein beliebiger Vektor $c' \in \mathbf{Kc}$ kann nun auch nach den $\{b'_k\}_{k \in I}$ entwickelt werden:

$$c' = \sum_k \gamma'_k b'_k.$$

Man liest aus der Entwicklung von c ab, dass $\gamma_k = 0 \quad \forall k \geq 3$. Ferner gilt $\gamma_k = \langle b_k | c \rangle$ und $\gamma'_k = \langle b'_k | c' \rangle$. Wegen

$$\frac{|\langle b_k | c \rangle|^2}{\langle b_k | b_k \rangle \langle c | c \rangle} = \mathbf{b}_k \odot \mathbf{c} = \mathbf{Kb}_k \odot \mathbf{Kc} = \frac{|\langle b'_k | c' \rangle|^2}{\langle b'_k | b'_k \rangle \langle c' | c' \rangle}$$

folgt dann für die Koeffizienten von c' :

$$\gamma'_k = \langle b'_k | c' \rangle = \langle b_k | c \rangle = 0 \quad \forall k \geq 3.$$

Dabei haben wir wieder ausgenutzt, dass $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$. Die Entwicklung von c' reduziert sich also auf

$$c' = \gamma'_1 b'_1 + \gamma'_2 b'_2.$$

Da nun nach Konstruktion $b'_1 \in \mathbf{Ka}$ und $b'_2 \in \mathbf{Kb}$ und ferner die obige Konstruktion für beliebige $c' \in \mathbf{Kc}$ durchführbar ist, haben wir

$$\mathbf{Kc} \in \mathbf{Ka} \vee \mathbf{Kb} \quad \forall c \in \mathbf{a} \vee \mathbf{b}.$$

In jedem Fall gilt natürlich $\mathbf{Kc} \in \mathbf{K}(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})$ und wir erhalten:

$$\mathbf{K}(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \subset \mathbf{Ka} \vee \mathbf{Kb}.$$

Nun respektiert auch die inverse Transformation \mathbf{K}^{-1} der Abbildung \mathbf{K} die innere Struktur \odot . Wir haben also auch:

$$\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{a}' \vee \mathbf{b}') \subset \mathbf{K}^{-1}\mathbf{a}' \vee \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}' \quad \forall \mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \mathcal{PH},$$

und wegen der Surjektivität von \mathbf{K} können wir \mathbf{a}' und \mathbf{b}' ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Bilder unter \mathbf{K} auffassen. Seien also $\mathbf{a}' = \mathbf{Ka}$ und $\mathbf{b}' = \mathbf{Kb}$, dann folgt:

$$\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{Ka} \vee \mathbf{Kb}) \subset \mathbf{a} \vee \mathbf{b},$$

nach Abbildung mit \mathbf{K} also:

$$\mathbf{Ka} \vee \mathbf{Kb} \subset \mathbf{K}(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}),$$

die Inklusion in die andere Richtung. Wir haben damit

$$\mathbf{K}(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \mathbf{Ka} \vee \mathbf{Kb},$$

wonach \mathbf{K} eine Kollineation ist (vgl. Definition I.5). □

Aus der Definition der Symmetrietransformation III.1 folgt dann natürlich sofort:

KORROLAR VI.2. *Jede Symmetrietransformation ist eine Kollineation zwischen projektiven Hilberträumen.*

Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig, denn es kann natürlich Kollineationen auf \mathcal{PH} geben, die die intrinsische Struktur $\odot : \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$ nicht invariant lassen, und es wäre eine vom mathematischen Standpunkt aus sicher interessante Aufgabe herauszufinden, ob der Hauptsatz der projektiven Geometrie auch für solche Kollineationen, die dann Abbildungen zwischen beliebigdimensionalen projektiven Hilberträumen sind, seine Gültigkeit behält. Wir beschränken uns im Folgenden bei der Verallgemeinerung des Hauptsatzes der projektiven Geometrie allerdings auf die quasiunitären Abbildungen auf \mathcal{PH} , d.h. auf solche Kollineationen $\mathbf{K} : \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$, die aus der Invarianz der inneren Struktur $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R}$ folgen. Formulieren aber zuvor noch kurz das Wigner-Theorem für endlichdimensionale Hilberträume, das nun durch den Kollineationssatz VI.1 zum Korollar des Hauptsatzes der projektiven Geometrie I.12 wird.

KORROLAR VI.3 (Wigner-Theorem für endlichdimensionale Hilberträume). *Sei \mathcal{H}_n ein $(n + 1)$ -dimensionaler Hilbertraum, sei ferner $\mathbf{K} : \mathcal{PH}_n \rightarrow \mathcal{PH}_n$ eine quasiunitäre Kollineation (d.h. eine Symmetrietransformation). Dann gibt es eine zu \mathbf{K} kompatible, semiunitäre Abbildung $U : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_n & \xrightarrow{U} & \mathcal{H}_n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{PH}_n & \xrightarrow{\mathbf{K}} & \mathcal{PH}_n \end{array}$$

Ist $\{b_k\}_{k \in I_n}$ eine Basis von \mathcal{H}_n , so haben wir also:

$$(58) \quad \left[U \sum_{k=0}^n \alpha_k b_k \right] = \left[\sum_{k=0}^n \sigma(\alpha_k) U b_k \right],$$

mit $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ einem Körperautomorphismus.

BEWEIS. Nach Korollar VI.2 ist jede Symmetrietransformation eine Kollineation. Für den endlichdimensionalen Vektorraum \mathcal{H}_n können wir demnach den Hauptsatz der projektiven Geometrie anwenden, und erhalten die Existenz einer kompatiblen semilinearen Abbildung $U : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$. Da $\mathbf{K} : \mathcal{PH}_n \rightarrow \mathcal{PH}_n$ aber insbesondere quasiunitär ist, muss jede kompatible Abbildung orthogonale Vektoren auf orthogonale Vektoren abbilden. Wählen wir also die Bilder $U b_k \in \mathbf{K}[b_k]$ der Vektoren einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_k\}_{k \in I}$ ebenfalls normiert, so erhalten wir eine semiunitäre, kompatible Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ (vgl. IV.4). \square

2. Verallgemeinerung des Hauptsatzes

Der oben bewiesene Kollineationssatz macht es uns nun möglich den Hauptsatz der projektiven Geometrie noch auf beliebigdimensionale projektive Hilberträume zu verallgemeinern. Was dazu noch fehlt ist eine Konvergenzbetrachtung, die es uns erlaubt die endlichen Summen in (58) durch abzählbare zu ersetzen. Was bei dieser Betrachtung wesentlich eingeht ist zum einen das endlichdimensionale Wigner-Theorem (Korollar VI.3) und zum anderen die Quasiunitarität einer zu $\mathbf{K} : \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$ kompatiblen Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Wir werden sehen, dass der Schritt vom Endlichen ins Unendliche verhältnismäßig klein ist. Der wesentliche Teil der Konstruktion, der die geometrischen Überlegungen beinhaltet, wurde bereits im ersten Abschnitt durchgeführt.

Sei zur konkreten Ausführung der Konvergenzbetrachtung nun, wie oben, $\mathcal{B} = \{b_k\}_{k \in I}$ eine ONB von \mathcal{H} , sei ferner $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ eine zu $\mathbf{K} : \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$ kompatible Abbildung, dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass auch die Menge $\mathcal{B}' = \{Ub_k\}_{k \in I}$ eine ONB von \mathcal{H} bildet (vgl. Korollar IV.3, bzw. Beweis von Theorem VI.1). Sei ferner $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Körperautomorphismus. Wir haben dann zu zeigen:

THEOREM VI.4 (Hauptsatz der projektiven Geometrie auf projektiven Hilberträumen). *Sei $\mathbf{K} : \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$ mit*

$$\mathbf{K}\mathbf{a} \odot \mathbf{K}\mathbf{b} = \mathbf{a} \odot \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{PH}$$

eine quasiunitären Kollineation auf einem projektiven Hilbertraum.^a Dann ist \mathbf{K} auch eine quasiunitäre Semiprojektivität, d.h. die zu \mathbf{K} kompatible Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ kann semiunitär gewählt werden:

$$(59) \quad \left[U \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k b_k \right] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sigma(\alpha_k) Ub_k \right].$$

^aMan beachte, dass die Eigenschaft "quasiunitär" bereits impliziert, dass es sich bei der Abbildung um eine Kollineation handelt (vgl. Kollineationssatz VI.1).

BEWEIS.

Vorüberlegungen. Wir setzen zur Abkürzung für die Partialsummen der obigen Reihen:

$$(60) \quad x_n := \sum_{k=0}^n \alpha_k b_k \quad y_n := Ux_n = U \sum_{k=0}^n \alpha_k b_k \quad z_n := \sum_{k=0}^n \sigma(\alpha_k) Ub_k.$$

Fassen wir \mathcal{H}_n als endlichdimensionalen Unterraum von \mathcal{H} auf, der von den ersten $n + 1$ Basisvektoren $\{b_0, \dots, b_n\}$ aufgespannt wird, so folgt aus dem endlichdimensionalen Fall des Wigner-Theorems (Korollar VI.3), dass

$$(61) \quad y_n = z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Auf der linken Seite von (59) taucht kein Problem auf, da die Definitionsmenge der Kollineation $\mathbf{K} : \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$ der projektive Hilbertraum \mathcal{PH} ist, ist die Definitionsmenge der kompatiblen Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ der Hilbertraum. Es gilt also insbesondere

$$(62) \quad \boxed{x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k b_k \in \mathcal{H}},$$

das heißt die Folge der Partialsummen x_n konvergiert gegen ein Element $x \in \mathcal{H}$.

Auch die Reihe auf der rechten Seite konvergiert gegen ein Element $z \in \mathcal{H}$. Da sowohl $\{b_k\}$ als auch $\{Ub_k\}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} bildet, folgt die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma(\alpha_k) Ub_k$ unmittelbar aus $|\sigma(\alpha)| = |\alpha|$ und der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k b_k$. Explizit rechnet man nach, dass

die Folge $\mathcal{Z} := (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen gegen ein Element $z \in \mathcal{H}$ konvergiert:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \|z - z_n\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \sigma(\alpha_k) U b_k - \sum_{k=0}^n \sigma(\alpha_k) U b_k \right\|^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \sigma(\alpha_k) U b_k \right\|^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\sigma(\alpha_k)|^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k b_k - \sum_{k=0}^n \alpha_k b_k \right\|^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0.
 \end{aligned}$$

Wir haben also auch:

$$(63) \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \mathcal{H}}.$$

Zur späteren Referenz sei noch bemerkt, dass aus der starken Konvergenz (62) bzw. (63) aufgrund der Stetigkeit des Skalarproduktes auch die schwache (komponentenweise) Konvergenz folgt. Es gilt demnach:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n | a \rangle = \langle x | a \rangle \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle z_n | a \rangle = \langle z | a \rangle \quad \forall a \in \mathcal{H}.$$

Insbesondere folgt daraus:²

$$(64) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle x_n | a \rangle|^2 = |\langle x | a \rangle|^2 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle z_n | a \rangle|^2 = |\langle z | a \rangle|^2 \quad \forall a \in \mathcal{H}.$$

Desweiteren folgt aus den selben Gleichungen (62) und (63) auch die Konvergenz der Normen:

$$(65) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^2 = \|x\|^2 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\|^2 = \|z\|^2,$$

schließlich ist auch die Norm $\|\cdot\| : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige Abbildung.

Was wir nun noch zeigen müssen. Was wir nun noch zeigen müssen, ist, dass der Grenzwert $z = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma(\alpha_k) U b_k$ (vgl. (63)) ein Element des Strahls $\mathbf{K}[x] = [Ux]$ ist, dass also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in [Ux].$$

Eigentlicher Beweis. Auf der einen Seite haben wir (vgl. (60)):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle y_n | a \rangle|^2}{\|y_n\|^2 \|a\|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle U x_n | a \rangle|^2}{\|U x_n\|^2 \|a\|^2} \quad \forall a \in \mathcal{H},$$

²

In \mathbb{C} gilt: $\alpha_n \rightarrow \alpha \Rightarrow |\alpha_n| \rightarrow |\alpha|$
 und in \mathbb{R} : $\rho_n \rightarrow \rho \Rightarrow \rho_n^2 \rightarrow \rho^2$.

setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a := Ub$, so folgt zusammen mit der Quasiunitarität der kompatiblen Abbildung U :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle y_n | a \rangle|^2}{\|y_n\|^2 \|a\|^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle Ux_n | Ub \rangle|^2}{\|Ux_n\|^2 \|Ub\|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle x_n | b \rangle|^2}{\|x_n\|^2 \|b\|^2}. \end{aligned}$$

Aus (64) und (65) folgt dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle y_n | a \rangle|^2}{\|y_n\|^2 \|a\|^2} = \frac{|\langle x | b \rangle|^2}{\|x\|^2 \|b\|^2},$$

was wir wegen der Quasiunitarität wieder umschreiben können zu:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle y_n | a \rangle|^2}{\|y_n\|^2 \|a\|^2} &= \frac{|\langle Ux | Ub \rangle|^2}{\|Ux\|^2 \|Ub\|^2} \\ (66) \qquad \qquad \qquad &= \frac{|\langle Ux | a \rangle|^2}{\|Ux\|^2 \|a\|^2} \quad \forall a \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite erhalten wir aus dem Wigner-Theorem für endliche Dimension (vgl. Gleichung (61)):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle y_n | a \rangle|^2}{\|y_n\|^2 \|a\|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle z_n | a \rangle|^2}{\|z_n\|^2 \|a\|^2},$$

woraus mit (64) und (65) sofort folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle y_n | a \rangle|^2}{\|y_n\|^2 \|a\|^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle z_n | a \rangle|^2}{\|z_n\|^2 \|a\|^2} \\ (67) \qquad \qquad \qquad &= \frac{|\langle z | a \rangle|^2}{\|z\|^2 \|a\|^2} \quad \forall a \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun beide Ergebnisse (66) und (67) zusammen, so folgt nach der Definition der Wahrscheinlichkeitsabbildung (13):

$$\begin{aligned} \frac{|\langle Ux | a \rangle|^2}{\|Ux\|^2 \|a\|^2} &= \frac{|\langle z | a \rangle|^2}{\|z\|^2 \|a\|^2} \\ [Ux] \odot [a] &= [z] \odot [a] \quad \forall a \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Setzen wir speziell $[a] = [z]$, so folgt daraus

$$[Ux] \odot [z] = 1$$

und mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung (Lemma II.2) folgt die Behauptung:

$$[Ux] = [z].$$

□

Nun sind die quasiunitären Kollineationen $\mathbf{K} : \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$ auf dem projektiven Hilbertraum aber gerade die Symmetrietransformationen. Es folgt demnach, wie oben angedeutet, direkt aus der Verallgemeinerung VI.4 des Hauptsatzes der projektiven Geometrie das Wigner-Theorem:

KORROLAR VI.5 (Wigner-Theorem). *Jede Symmetrietransformation $\mathbf{T} : \mathcal{PH} \rightarrow \mathcal{PH}$ ist eine quasiunitäre Semiprojektivität. Zu jeder Symmetrietransformation gibt es demnach eine kompatible semiunitäre Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, das heißt das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \overset{U}{\dashrightarrow} & \mathcal{H} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{PH} & \xrightarrow{\mathbf{T}} & \mathcal{PH} \end{array}$$

Wie wir also gesehen haben, steckt die Geometrie des Wigner-Theorems bereits fast vollkommen in dem Hauptsatz der projektiven Geometrie. Insbesondere haben wir gesehen, dass die Intuition, die wir (speziell in der Quantenmechanik) oft aus Überlegungen im Endlichdimensionalen erhalten, meist auch für unendliche Dimensionen ihre Gültigkeit behält.

Kohomologie von Gruppen

Wir orientieren uns bei dieser knappen Einführung an einer Aufgabe aus [AB95, Abschnitt 5.12].

In der mathematischen Literatur wird die Kohomologie von Gruppen oft im Zusammenhang mit Gruppenerweiterungen behandelt. Dort treten als Elemente sogenannte n -Koketten auf, das sind Abbildungen

$$f : \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n \text{ Stück}} \rightarrow M$$

aus dem n -fachen Produkt der Gruppe mit sich selbst auf einen G -Modul M . Ein G -Modul ist dabei eine Abel'sche Gruppe $(M, +)$ auf der G (von links) wirkt:

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \\ (g, a) &\mapsto ga, \end{aligned}$$

wobei die Gruppenstruktur in M erhalten bleibt:

$$g(a_1 + a_2) = ga_1 + ga_2.$$

Wir beschränken uns für unsere Betrachtungen auf den Spezialfall $M = \mathbb{R}$. Es sei also G eine Gruppe und $(\mathbb{R}, +)$ ein G -Modul. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir als Wirkung von G auf $(\mathbb{R}, +)$ die triviale Wirkung wählen

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (g, \alpha) &\mapsto \alpha. \end{aligned}$$

Wir werden uns bei den Betrachtungen zur Gruppenkohomologie in dieser Arbeit auf G -Moduln mit trivialer Gruppenwirkung beschränken. Wir definieren nun:

DEFINITION A.1 (n -Kokette von G mit Werten in \mathbb{R}). Eine n -Kokette von G mit Werten in \mathbb{R} ist eine Abbildung

$$k: \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n \text{ Stück}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Koketten n -ten Grades erben die Gruppenstruktur von $(\mathbb{R}, +)$, sind nämlich f und h zwei Koketten n -ten Grades, so definieren wir die Verknüpfung

$$(f + h)(g_1, \dots, g_n) := f(g_1, \dots, g_n) + h(g_1, \dots, g_n),$$

bezüglich der die n -Koketten offensichtlich eine Abel'sche Gruppe bilden. Wir bezeichnen diese Gruppe der n -Koketten von G mit Werten in \mathbb{R} mit $C^n(G, \mathbb{R})$. Analog zu der Vorgehensweise bei der de Rham-Kohomologie können wir nun eine Abbildung definieren, die den Grad einer G -Kokette um Eins erhöht:

DEFINITION A.2 ("Äußere Ableitung" für n -Koketten auf G). Wir definieren die Abbildung

$$\delta^n : C^{n-1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow C^n(G, \mathbb{R})$$

durch:

$$\begin{aligned} \left(\delta^n \binom{n-1}{k} \right) (g_1, \dots, g_n) &= \binom{n-1}{k} (g_2, \dots, g_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{k} (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) \\ &+ (-1)^n \binom{n-1}{k} (g_1, \dots, g_{n-1}). \end{aligned}$$

Genauso wie die äußere Ableitung bei den Differentialformen ist diese Abbildung nilpotent, d.h.

$$(68) \quad \boxed{\delta^{n+1} \delta^n = 0}.$$

BEWEIS. Sei also $f \in C^{n-2}(G, \mathbb{R})$, dann haben wir:

$$\begin{aligned} (\delta^n (\delta^{n-1} f)) (g_1, \dots, g_n) &= (\delta^{n-1} f) (g_2, \dots, g_n) \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\delta^{n-1} f) (g_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_n) \\ &+ (-1)^n (\delta^{n-1} f) (g_1, \dots, g_{n-1}) \\ &= \underbrace{f(g_3, \dots, g_n)}_{(1)} + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k f(g_2, \dots, g_{k+1} g_{k+2}, \dots, g_n) + \underbrace{(-1)^{n-1} f(g_2, \dots, g_{n-1})}_{(2)} \\ &+ (-1)^n \left[\underbrace{f(g_2, \dots, g_{n-1})}_{(2')} + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k f(g_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_{n-1}) + \underbrace{(-1)^{n-1} f(g_1, \dots, g_{n-2})}_{(3)} \right] \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left[\underbrace{f(\widehat{g}_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_n)}_{(1')} + \sum_{l < k} (-1)^l f(g_1, \dots, g_l g_{l+1}, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_n) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l > k} (-1)^{l+1} f(g_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_l g_{l+1}, \dots, g_n) \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{(-1)^{n-1} f(g_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, \widehat{g}_n)}_{(3')} \right], \end{aligned}$$

wobei die Argumente mit Dach gestrichen werden. Betrachten wir zunächst die Terme ohne Summenzeichen, so sehen wir, dass sich der Term (1) gegen den ersten Term (1') der Summe für $k = 1$ weghebt. Der Term (2) hebt sich mit (2') weg; und der Term (3) wird durch den Term (3') der Summe für $k = n - 1$ kompensiert. Es bleibt also noch:

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k f(g_2, \dots, g_{k+1}g_{k+2}, \dots, g_n)}_{(4)} + \underbrace{(-1)^n \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k f(g_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_{n-1})}_{(5)} \\
&+ \underbrace{\sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k f(g_2, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_n)}_{(4')} + \underbrace{(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k f(g_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_{n-1})}_{(5')} \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left[\sum_{l < k} (-1)^l f(g_1, \dots, g_l g_{l+1}, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_n) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l > k} (-1)^{l+1} f(g_1, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_l g_{l+1}, \dots, g_n) \right],
\end{aligned}$$

hier heben sich nun die Terme (4) mit (4') nach einer Indexverschiebung und die Terme (5) mit (5') weg. Dass sich auch die letzten beiden Summen aufheben, kann man sich ebenfalls mit einer Indexumbenennung überlegen:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sum_{l < k} (-1)^l f(g_1, \dots, g_l g_{l+1}, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_n) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \sum_{j > i} (-1)^j f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_j g_{j+1}, \dots, g_n),
\end{aligned}$$

für festes $j = k$ laufen beide Summen (i und l) von $1, \dots, j = k$, man muss dann nur noch über alle j bzw. k summieren und erhält:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sum_{l < k} (-1)^l f(g_1, \dots, g_l g_{l+1}, \dots, g_k g_{k+1}, \dots, g_n) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sum_{i < j} (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_j g_{j+1}, \dots, g_n) = 0
\end{aligned}$$

□

Da die Abbildungen $\delta^n : C^{n-1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow C^n(G, \mathbb{R})$ überdies auch die Gruppenverknüpfung respektieren, d.h.

$$\delta^n(f + h) = \delta^n f + \delta^n h \quad \forall f, h \in C^{n-1}(G, \mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

sind sowohl die Bilder, als auch die Kerne von δ^n abgeschlossen unter "+".¹ Wir erhalten also Untergruppen von $C^n(G, \mathbb{R})$ bzw. $C^{n-1}(G, \mathbb{R})$ und können definieren:

¹Sind $f, h \in \text{im}(\delta^n)$, so ist $f = \delta^n a$ und $h = \delta^n b$, dann ist aber auch

$$f + h = \delta^n a + \delta^n b = \delta^n(a + b) \in \text{im}(\delta^n).$$

Sind $f, h \in \text{ker}(\delta^n)$, so ist $\delta^n f = \delta^n h = 0$, und wir haben auch

$$\delta^n(f + h) = \delta^n f + \delta^n h = 0,$$

also $(f + h) \in \text{ker}(\delta^n)$

DEFINITION A.3 (Kozykel und Koränder). Sei $\delta^n : C^{n-1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow C^n(G, \mathbb{R})$ wie oben beschrieben, dann bezeichnen wir die Untergruppe

$$B^n(G, \mathbb{R}) := \text{im}(\delta^n) \subset C^n(G, \mathbb{R})$$

als n -te Korandgruppe von G mit Werten in \mathbb{R} ; und die Untergruppe

$$Z^n(G, \mathbb{R}) := \ker(\delta^{n+1}) \subset C^n(G, \mathbb{R})$$

als n -te Kozykelgruppe von G mit Werten in \mathbb{R} .

Aus (68) folgt dann $\text{im}(\delta^n) \subset \ker(\delta^{n+1})$, nach Definition also

$$B^n(G, \mathbb{R}) \subset Z^n(G, \mathbb{R}).$$

Damit haben wir einen sogenannten Komplex von Kokettengruppen:

$$(69) \quad C^1(G, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta^2} C^2(G, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta^3} C^3(G, \mathbb{R}) \rightarrow \dots$$

Wir haben folgende interessante

FESTSTELLUNG A.4. Die 1-Kozykel der Gruppe G mit Werten in \mathbb{R} sind gerade die Gruppenhomomorphismen $h : G \rightarrow (\mathbb{R}, +)$, es gilt also

$$\frac{1}{k}(g_1 g_2) = \frac{1}{k}(g_1) + \frac{1}{k}(g_2) \quad \forall \frac{1}{k} \in Z^1(G, \mathbb{R}).$$

BEWEIS. $Z^1(G, \mathbb{R})$ ist nach Definition $\ker(\delta^2)$, also die Menge

$$Z^1(G, \mathbb{R}) = \{z \in C^1(G, \mathbb{R}) : \delta^2 z = 0\}.$$

Sei also $z : G \rightarrow \mathbb{R}$ ein 1-Kozykel, so gilt nach Definition A.2:

$$0 = (\delta^2 z)(g_1, g_2) = z(g_2) - z(g_1 g_2) + z(g_1) \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

also ist z ein Gruppenhomomorphismus. Die umgekehrte Richtung ist nun ebenfalls offensichtlich. \square

Der Komplex (69) gibt nun Anlass zu der Definition einer Gruppenkohomologie.

DEFINITION A.5 (Gruppenkohomologie auf G). Es sei wie oben $Z^n(G, \mathbb{R})$ die Gruppe der n -Kozykel von G mit Werten in \mathbb{R} ; $B^n(G, \mathbb{R})$ die entsprechende Korandgruppe. Wir definieren dann die Kohomologiegruppe vom Grade n auf G als:

$$H^n(G, \mathbb{R}) := \frac{Z^n(G, \mathbb{R})}{B^n(G, \mathbb{R})} = \frac{\ker(\delta^{n+1})}{\text{im}(\delta^n)}.$$

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die hier gegebene Definition einer Gruppenkohomologie keineswegs die allgemeinste ist, für eine allgemeine Definition sei auf die mathematische Literatur (z.B. [AB95]) verwiesen. Für unsere Zwecke und insbesondere zum Verständnis der im 3. Abschnitt des Kapitels III dieser Arbeit verwendeten Schlussweise, reicht die hier gegebene Definition aber völlig aus. Es sei vielleicht noch bemerkt, dass die dort auftauchende projektive Phase keine Werte in \mathbb{R} , sondern vielmehr in dem Modulring $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ annimmt, der aber genauso elementar wie zu Anfang dieses Anhangs beschrieben, durch die triviale Wirkung von G zu einem G -Modul gemacht werden kann.

ANHANG B

Rechnungen

In diesem Anhang sind alle Rechnungen gesammelt, auf die im Hauptdokument verwiesen wurde.

Aus Kapitel IV.

von S. 57: Formeln (32)→(33).

Die Formel (32) lautet:

$$\begin{aligned}
 \left| 1 + \frac{\gamma_k}{\gamma_1} + \frac{\gamma_l}{\gamma_1} \right|^2 &= \left| 1 + \frac{\gamma_k}{\gamma_1} + \overline{\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1} \right)} \right|^2 \\
 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1} + \frac{\gamma_l}{\gamma_1}\right) + \left| \frac{\gamma_k}{\gamma_1} + \frac{\gamma_l}{\gamma_1} \right|^2 &= 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1} + \overline{\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1} \right)}\right) + \left| \frac{\gamma_k}{\gamma_1} + \overline{\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1} \right)} \right|^2 \\
 \left[\operatorname{Re}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1} + \frac{\gamma_l}{\gamma_1}\right) \right]^2 + \left[\operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1} + \frac{\gamma_l}{\gamma_1}\right) \right]^2 &= \left[\operatorname{Re}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1} + \overline{\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1} \right)}\right) \right]^2 + \left[\operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1} + \overline{\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1} \right)}\right) \right]^2 \\
 \left[\operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1}\right) \right]^2 &= \left[\operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1}\right) - \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1}\right) \right]^2 \\
 \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1}\right) \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1}\right) &= -\operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1}\right) \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1}\right) \\
 \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_1}\right) \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_1}\right) &= 0,
 \end{aligned}$$

das ist die Formel (33).

von S. 58: Formeln (36)→(37).

Die Formel (36) lautet:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_k \overline{\beta_k} \alpha_k \right|^2 &= \left| \sum_k \beta_k \alpha_k \right|^2 \\
 \left| \sum_k \overline{\beta_k} \alpha_k \right|^2 - \left| \sum_k \beta_k \alpha_k \right|^2 &= 0 \\
 \left[\sum_k \operatorname{Re}(\overline{\beta_k} \alpha_k) \right]^2 + \left[\sum_k \operatorname{Im}(\overline{\beta_k} \alpha_k) \right]^2 - \left[\sum_k \operatorname{Re}(\beta_k \alpha_k) \right]^2 - \left[\sum_k \operatorname{Im}(\beta_k \alpha_k) \right]^2 &= 0
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\eta\chi) &= \operatorname{Re}(\eta) \operatorname{Re}(\chi) - \operatorname{Im}(\eta) \operatorname{Im}(\chi) & \forall \eta, \chi \in \mathbb{C} \\
 \operatorname{Im}(\eta\chi) &= \operatorname{Re}(\eta) \operatorname{Im}(\chi) + \operatorname{Re}(\chi) \operatorname{Im}(\eta) & \forall \eta, \chi \in \mathbb{C}
 \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
& \left[\underbrace{\sum_k \operatorname{Re}(\overline{\beta_k}) \operatorname{Re}(\alpha_k)}_{=:A} - \underbrace{\sum_k \operatorname{Im}(\overline{\beta_k}) \operatorname{Im}(\alpha_k)}_{=: -B} \right]^2 + \left[\underbrace{\sum_l \operatorname{Re}(\overline{\beta_l}) \operatorname{Im}(\alpha_l)}_{=:C} + \underbrace{\sum_l \operatorname{Im}(\overline{\beta_l}) \operatorname{Re}(\alpha_l)}_{=: -D} \right]^2 \\
& - \left[\underbrace{\sum_m \operatorname{Re}(\beta_m) \operatorname{Re}(\alpha_m)}_{=:A} - \underbrace{\sum_m \operatorname{Im}(\beta_m) \operatorname{Im}(\alpha_m)}_{=:B} \right]^2 - \left[\underbrace{\sum_n \operatorname{Re}(\beta_n) \operatorname{Im}(\alpha_n)}_{=:C} + \underbrace{\sum_n \operatorname{Im}(\beta_n) \operatorname{Re}(\alpha_n)}_{=:D} \right]^2 = 0
\end{aligned}$$

mit $\operatorname{Re}(\overline{\eta}) = \operatorname{Re}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{C}$
 $\operatorname{Im}(\overline{\eta}) = -\operatorname{Im}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{C}$

und den angedeuteten Definitionen rechnet man leicht nach:

$$\begin{aligned}
[A + B]^2 - [A - B]^2 + [C - D]^2 - [C + D]^2 &= 0 \\
4AB - 4CD &= 0 \\
AB - CD &= 0
\end{aligned}$$

Rückwärtiges Einsetzen liefert:

$$\sum_{kl} \operatorname{Re}(\beta_k) \operatorname{Re}(\alpha_k) \operatorname{Im}(\beta_l) \operatorname{Im}(\alpha_l) - \sum_{mn} \operatorname{Re}(\beta_m) \operatorname{Im}(\alpha_m) \operatorname{Im}(\beta_n) \operatorname{Re}(\alpha_n) = 0,$$

woraus man nach Umbenennung der Indizes: $m \rightarrow l$ und $n \rightarrow k$ erhält:

$$\sum_{kl} \{ \operatorname{Re}(\alpha_k) \operatorname{Im}(\alpha_l) \operatorname{Re}(\beta_k) \operatorname{Im}(\beta_l) - \operatorname{Re}(\alpha_k) \operatorname{Im}(\alpha_l) \operatorname{Re}(\beta_l) \operatorname{Im}(\beta_k) \} = 0.$$

Das kann man auch als Produkt schreiben:

$$\sum_{kl} [\operatorname{Re}(\alpha_k) \operatorname{Im}(\alpha_l) - \operatorname{Re}(\alpha_l) \operatorname{Im}(\alpha_k)] \cdot [\operatorname{Re}(\beta_k) \operatorname{Im}(\beta_l) - \operatorname{Re}(\beta_l) \operatorname{Im}(\beta_k)] = 0.$$

Ersetzen wir dann noch $\alpha_k \rightarrow \overline{\alpha_k}$ und $\beta_k \rightarrow \overline{\beta_k}$, so ergibt sich unter Beachtung der dadurch geänderten Vorzeichen:

$$\sum_{kl} [\operatorname{Re}(\overline{\alpha_k}) \operatorname{Im}(\alpha_l) + \operatorname{Re}(\alpha_l) \operatorname{Im}(\overline{\alpha_k})] \cdot [\operatorname{Re}(\overline{\beta_k}) \operatorname{Im}(\beta_l) + \operatorname{Re}(\beta_l) \operatorname{Im}(\overline{\beta_k})] = 0,$$

was wir mit Hilfe der obigen Identität umschreiben können zu:

$$\sum_{kl} \operatorname{Im}(\overline{\alpha_k} \alpha_l) \operatorname{Im}(\overline{\beta_k} \beta_l) = 0.$$

Das ist gerade die Formel (37).

Die Indikatorfunktionen von Bargmann und Weinberg

Um nochmals explizit zu zeigen, dass die beiden Fälle $\sigma = \text{id}$ und $\sigma = \overline{\text{id}}$ eine intrinsische Eigenschaft der Symmetrietransformation widerspiegeln, definiert Bargmann eine Indikatorfunktion

$$\begin{aligned} \Delta : (S^\infty/U(1))^3 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &\mapsto \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{b} | \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{c} | \mathbf{a} \rangle \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{c}, \end{aligned}$$

mit deren Hilfe man ablesen kann, ob die Realisierung einer Symmetrietransformation unitär oder antiunitär ist.

Die Funktion Δ ist offensichtlich unabhängig von den globalen Phasen der Repräsentanten $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in S^\infty$. Eine Transformation der globalen Phase der Repräsentanten:

$$\mathbf{a} \mapsto e^{i\alpha} \mathbf{a} \quad , \quad \mathbf{b} \mapsto e^{i\beta} \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{c} \mapsto e^{i\gamma} \mathbf{c},$$

eine Transformation also, die die Zugehörigkeit zu dem jeweiligen Einheitskreis respektiert, wirkt sich nicht auf den Wert von Δ aus, damit ist $\Delta : (S^\infty/U(1))^3 \rightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert. Wir können also aus den Einheitskreisen beliebige Repräsentanten wählen und erhalten aus der speziellen Wahl $U\mathbf{a} \in \mathbf{T}\mathbf{a}$ etc.:

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{T}\mathbf{a}, \mathbf{T}\mathbf{b}, \mathbf{T}\mathbf{c}) &= \langle U\mathbf{a} | U\mathbf{b} \rangle \langle U\mathbf{b} | U\mathbf{c} \rangle \langle U\mathbf{c} | U\mathbf{a} \rangle \\ &= \sigma(\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle) \sigma(\langle \mathbf{b} | \mathbf{c} \rangle) \sigma(\langle \mathbf{c} | \mathbf{a} \rangle) \\ &= \sigma(\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{b} | \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{c} | \mathbf{a} \rangle). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

$$(70) \quad \Delta(\mathbf{T}\mathbf{a}, \mathbf{T}\mathbf{b}, \mathbf{T}\mathbf{c}) = \sigma(\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})).$$

Ist $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so erhalten wir eine Information darüber, ob die zu $\mathbf{T} : S^\infty/U(1) \rightarrow S^\infty/U(1)$ kompatible Abbildung $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ unitär oder antiunitär sein muss. Sie ist unitär, falls $\Delta(\mathbf{T}\mathbf{a}, \mathbf{T}\mathbf{b}, \mathbf{T}\mathbf{c}) = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ und antiunitär, falls $\Delta(\mathbf{T}\mathbf{a}, \mathbf{T}\mathbf{b}, \mathbf{T}\mathbf{c}) = \overline{\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$, wie wir oben bereits gesehen haben, gibt es nur diese beiden Möglichkeiten.

Aus der Betrachtung des Beweises von Weinberg kennen wir bereits eine ähnliche Indikatorfunktion (vgl. Abschnitt 2.4 Kap. IV), und wissen somit, dass es Vektoren in \mathcal{H} gibt, für die es keinen Unterschied macht, ob die entsprechende Abbildung antiunitär oder unitär ist. Wir hatten diese Menge dort mit $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ bezeichnet, die selbe Menge erhalten wir auch aus der Indikatorfunktion von Bargmann. Es sind alle Repräsentanten $\mathbf{a} \in \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{b}$ und $\mathbf{c} \in \mathbf{c}$, für die

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}.$$

Wählen wir nun eine Basis $\{b_i\}_{i \in I}$ von \mathcal{H} , so können wir die Repräsentanten in dieser Basis entwickeln, und erhalten für $\mathbf{a} = \sum_{i \in I} \alpha_i b_i$, $\mathbf{b} = \sum_{j \in I} \beta_j b_j$ und $\mathbf{c} = \sum_{k \in I} \gamma_k b_k$:

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \left\langle \sum_{i \in I} \alpha_i b_i \middle| \sum_{j \in I} \beta_j b_j \right\rangle \left\langle \sum_{k \in I} \beta_k b_k \middle| \sum_{l \in I} \gamma_l b_l \right\rangle \left\langle \sum_{m \in I} \gamma_m b_m \middle| \sum_{n \in I} \alpha_n b_n \right\rangle \\ &= \sum_{i, k, m \in I} (\overline{\alpha_i} \beta_i) (\overline{\beta_k} \gamma_k) (\overline{\gamma_m} \alpha_m). \end{aligned}$$

Für diejenigen Vektoren also, bei denen alle relativen Phasen bei der Darstellung in der Basis $\{b_i\}_{i \in I}$ verschwinden, bei denen die Entwicklungskoeffizienten also so gewählt werden müssen, dass alle die selbe Phase tragen, heben sich die Phasen der Koeffizienten alle heraus, es folgt $\Delta(a, b, c) \in \mathbb{R}$, das heißt $\sigma(\Delta(a, b, c)) = \Delta(a, b, c)$ und unabhängig von der gewählten Transformation und ihrer Realisierung gilt nach (70):

$$\Delta(Ta, Tb, Tc) = \Delta(a, b, c) .$$

Die Menge aller Vektoren, für die $\Delta(a, b, c) \in \mathbb{R}$ ist genau die Menge, die wir bei Weinberg mit der Schnittmenge $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ bezeichnet hatten, siehe Abbildung 2 in Kapitel IV. Die Bargmann'sche Indikatorfunktion macht deutlich, dass man zunächst eine Basis wählen muss, um die Menge dieser Vektoren explizit angeben zu können. Da die relativen Phasen der Darstellung eines Vektors insbesondere von der gewählten Basis abhängen, ist die oben bzw. bei Weinberg gefundene Menge $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ für jede Basis eine andere.

Teil 2

Identische Teilchen

Motivation

Der Spin-Statistik-Zusammenhang ist eines der grundlegendsten Phänomene, sowohl der relativistischen, als auch der nichtrelativistischen Quantentheorie. Während in der relativistischen Quantenfeldtheorie (QFT) schon die verschiedensten Beweise für diesen Zusammenhang gefunden wurden, ist es bis heute nicht gelungen einen Beweis dieses “Theorems” in der nichtrelativistischen Quantenmechanik (QM) zu finden. Man kann nicht abschließend beurteilen, ob ein solcher Beweis in der QM überhaupt existiert, obwohl es natürlich viele Beispiele für Phänomene gibt, die innerhalb der QM beschrieben werden, und die sich auf dem Spin-Statistik-Zusammenhang begründen. Darunter sind die Bose-Einstein-Kondensation, der fraktionierte Quanten-Hall-Effekt, oder auch das Pauli-Ausschlussprinzip, das uns ein Gerüst für den Aufbau der Atomhülle gibt.

In den letzten Jahrzehnten wurden viele Versuche unternommen den Spin-Statistik-Zusammenhang in der nichtrelativistischen Quantenmechanik herzuleiten. Startpunkt ist dabei meist ein klassischer Konfigurationsraum, in dem die Ununterscheidbarkeit der beteiligten Teilchen bereits eingebaut ist. Michael G. G. Laidlaw und Cécile Morette DeWitt waren unter den ersten, denen es gelang, daraus die Fermi-Bose-Alternative herzuleiten [LD71]. Sie erhielten dieses Ergebnis aus der Anwendung des Pfadintegral-Formalismus auf den Konfigurationsraum ununterscheidbarer Teilchen in drei Raumdimensionen. Jon Magne Leinaas und Jan Myrheim konnten dieses Ergebnis bestätigen und erhielten zusätzlich die sogenannte Anyon-Statistik für zwei Raumdimensionen [LM77]. In zwei Raumdimensionen ist die Statistik der Teilchen nicht durch ein Vorzeichen, sondern durch einen allgemeinen Phasenfaktor bestimmt (“any statistic”). Seit dem gab es viele verschiedene Ansätze, die versuchten einen Beweis des Spin-Statistik-Zusammenhangs aus der Geometrie des Konfigurationsraums von zwei identischen Teilchen herzuleiten. 1997 stellten beispielsweise Michael Victor Berry und Jonathan M. Robbins das Konzept einer “transported spin-basis” vor, das vermittels einer Eindeutigkeitsannahme für die Wellenfunktion auf den richtigen Zusammenhang von Spin und Statistik führt [BR97]. Es wurde allerdings von Andrés Reyes gezeigt, dass diese Eindeutigkeitsannahme zu Inkonsistenzen führt [Rey06]. Der selbe Autor veröffentlichte zusammen mit Nikolaos Papadopoulos, Mario Paschke und Florian Scheck einen Artikel, in dem sie einen Zugang zu dem Spin-Statistik-Theorem vermittels projektiver Moduln vorstellen [PPRS04].

Viele der modernen Arbeiten weisen darauf hin, dass ein Beweis des Spin-Statistik-Theorems alleine aus der Geometrie des Systems nicht möglich ist. Man sucht deshalb nach einer gewissen “minimalen Bedingung”, die innerhalb der nichtrelativistischen Quantenmechanik formuliert werden kann, und die dann vermittels der Geometrie ununterscheidbarer Teilchen auf den Spin-Statistik-Zusammenhang führt. Ein Ansatz, der in diese Richtung geht ist der Artikel von Bernd Kuckert [Kuc04], der Motivation für diesen zweiten Teil der vorliegenden Arbeit ist. Der Autor

präsentiert darin eine Bedingung an die Drehimpulsoperatoren des Ein- bzw. Zweiteilchensystems als zu dem Spin-Statistik-Zusammenhang äquivalente Aussage. Bevor wir die in diesem zweiten Teil angestrebten Ziele formulieren und unsere Vorgehensweise motivieren, wollen wir hier kurz die Hauptaussagen des Artikels von B. Kuckert zusammenfassen. Kuckert betrachtet in seiner Arbeit identische Teilchen sowohl in zwei, als auch in drei Raumdimensionen. Für den Fall, dass jedes der Teilchen nur zwei Freiheitsgrade hat, erhält er folgendes Ergebnis.

Bezeichne \mathbb{J} den Gesamtdrehimpulsoperator des Einteilchensystems, \mathbb{j} den entsprechenden Operator des Zweiteilchensystems, bezogen auf den Schwerpunkt des Zweiteilchensystems. Dann ist das Spin-Statistik-Theorem äquivalent zu der Aussage, dass ein unitärer Operator $U : \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}^2$ zwischen dem Einteilchen- und dem Zweiteilchenhilbertraum existiert, sodass:

$$(71) \quad \mathbb{j} = 2U\mathbb{J}U^\dagger,$$

dass also das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1 & \xleftarrow{U^\dagger} & \mathcal{H}^2 \\ 2\mathbb{J} \downarrow & & \downarrow \mathbb{j} \\ \mathcal{H}^1 & \xleftarrow{U} & \mathcal{H}^2 \end{array}$$

In drei Dimensionen reduziert B. Kuckert die Analyse auf die Hilberträume \mathcal{H}^\uparrow und \mathcal{H}^\downarrow , der Repräsentanten von Einteilchen- bzw. Zweiteilchenzuständen, in denen die z -Komponenten aller Spins maximal sind. Er betrachtet auf \mathcal{H}^\uparrow die Eigenräume \mathcal{H}_+^\uparrow und \mathcal{H}_-^\uparrow des z -Paritätsoperators $P_z : (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ und gelangt zu folgender Aussage:

Bezeichne \mathbb{J}_z die z -Komponente des Einteilchendrehimpulsoperators, \mathbb{j}_z die z -Komponente des Zweiteilchendrehimpulsoperators, dann kann die Gleichung

$$(72) \quad \mathbb{j}_z = 2U\mathbb{J}_zU^\dagger$$

nur richtig sein, wenn man sie entweder auf \mathcal{H}_+^\uparrow oder auf \mathcal{H}_-^\uparrow einschränkt, also entweder

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1 & \xleftarrow{U^\dagger} & \mathcal{H}_+^\uparrow \\ 2\mathbb{J}_z \downarrow & & \downarrow \mathbb{j}_z \\ \mathcal{H}^1 & \xleftarrow{U} & \mathcal{H}_+^\uparrow \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1 & \xleftarrow{U^\dagger} & \mathcal{H}_-^\uparrow \\ 2\mathbb{J}_z \downarrow & & \downarrow \mathbb{j}_z \\ \mathcal{H}^1 & \xleftarrow{U} & \mathcal{H}_-^\uparrow \end{array}$$

Die Bestätigung des Spin-Statistik-Zusammenhangs ist äquivalent zum ersten, seine Verletzung äquivalent zum zweiten Fall.

Verlieren wir noch kurz einige Worte über die Motivation der Gleichungen (71) und (72) aus der klassischen Mechanik (vgl. Abbildung 1). Betrachten wir zwei klassische, freie Teilchen gleicher Masse m mit beliebigen Geschwindigkeiten \vec{v}^1 und \vec{v}^2 . So bringt uns eine Geschwindigkeitstransformation, gekennzeichnet durch die roten Pfeile, in das Schwerpunktsystem. Der Gesamtdrehimpuls \vec{L}_{CM} im Schwerpunktsystem ist dann offensichtlich gleich dem doppelten Drehimpuls eines Teilchens \vec{L}_{CM}^i . In der Quantenmechanik gehören zu Ein- und Zweiteilchensystem natürlich zwei verschiedene Hilberträume. Insbesondere muss man die Konfigurationen, in denen die Teilchen vertauscht wurden identifizieren.

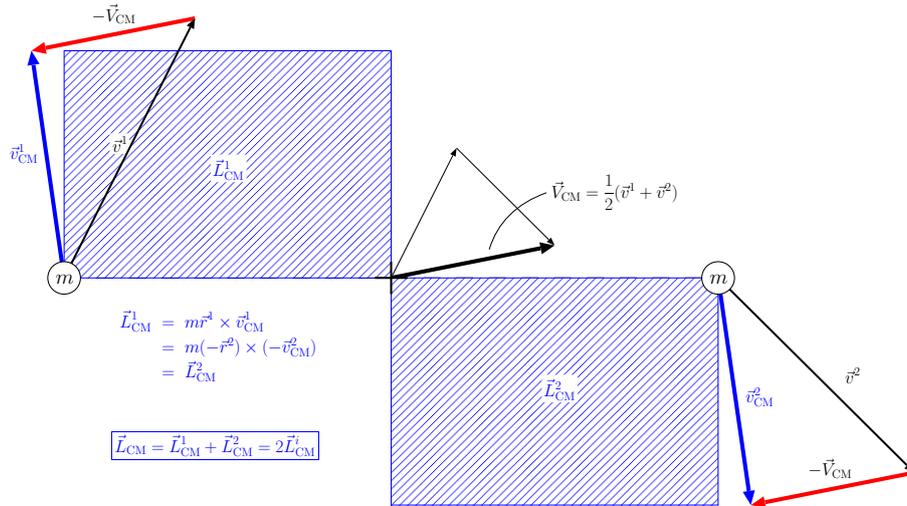


ABBILDUNG 1. Zwei klassische Teilchen und ihr Drehimpuls

Für den zweidimensionalen Fall wurde bereits eine geometrische Herleitung des Ergebnisses von B. Kuckert gefunden [KM05]. Die Kuckert-Aussage wird darin durch eine Analyse der unitären Darstellungen der *braid group* B_n bestätigt und sogar auf ein System von n identischen Teilchen erweitert.¹ Gegenstand dieses zweiten Teils der Arbeit ist nun die Grundlagen für eine geometrische Formulierung des dreidimensionalen Ergebnisses von Bernd Kuckert zu formulieren. Dazu betrachten wir im ersten Kapitel VII des zweiten Teils den Konfigurationsraum von zwei identischen Teilchen in drei Dimensionen. Wir werden feststellen, dass dies gerade die reelle projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ ist. Desweiteren motivieren wir hier die Beschreibung durch \mathbb{C}^n -Vektorbündel. Wir werden sehen, dass es zwei natürliche Vektorbündel über $\mathbb{R}P^2$ gibt. Die Schnitte des ersten Bündels beschreiben identische Teilchen, die der Bose-Einstein-Statistik gehorchen, die des zweiten Bündels beschreiben identische Teilchen in der Fermi-Dirac-Statistik. Diese Betrachtungsweise ist demnach eine weitere Herleitung der Fermi-Bose-Alternative aus der Geometrie des Konfigurationsraums identischer Teilchen. In Kapitel VIII formulieren wir dann die $SU(2)$ -Wirkung auf dem zu betrachtenden Basisraum $\mathbb{R}P^2$. Das letzte Kapitel IX des zweiten Teils befasst sich dann mit einer einfachen Hochhebung der $SU(2)$ -Wirkung in die beiden Vektorbündel über $\mathbb{R}P^2$ und in die entsprechenden Boson- und Fermion-Hilberträume.

Es sei an dieser Stelle noch bemerkt, dass das Konzept, in das wir hier anhand der Geometrie der Beschreibung von identischen Teilchen einen kleinen Einblick erhalten, auch andere Anwendungsgebiete hat. So betrachtet Christopher J. Isham, auf dessen Darstellungen wir uns bei dem Lift der $SU(2)$ -Wirkung in Kapitel IX stützen, in seiner Abhandlung [Ish84] einen möglichen Weg der Quantisierung eines nicht einfach zusammenhängenden Konfigurationsraums. Solch ein Konfigurationsraum kann, wie hier dargestellt, natürlich aus der Ununterscheidbarkeit von Teilchen erwachsen. Eines der interessantesten Beispiele, wo solche nicht einfach zusammenhängenden Konfigurationsräume ebenfalls auftreten, ist aber die Allgemeine Relativitätstheorie, deren Quantisierung, wie auch der nichtrelativistische Beweis des Spin-Statistik-Theorems, ein bis heute ungelöstes Problem darstellt.

¹Die *braid group* B_n ist dabei die Fundamentalgruppe des Konfigurationsraums Q_n (vgl. (75)) von n identischen Teilchen (*braid*: (engl.), Zopf), vgl. [Art47].

Der Hilbertraum für zwei identische Teilchen in \mathbb{R}^3

Nach der ausführlichen Diskussion des Wigner-Theorems im ersten Teil ist nun klar, dass wir uns bei der Darstellung von (orthochronen) Symmetrien in der Quantenmechanik, auf die Suche nach unitären Darstellungen beschränken dürfen.¹ Der Darstellungsraum ist demnach ein Hilbertraum \mathcal{H} mit innerem Produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, der im Allgemeinen aber kein Funktionenraum der Form $L^2(Q, \mathbb{C})$ zu sein braucht. In einer allgemeineren, geometrischeren Formulierung der Quantenmechanik betrachtet man als Darstellungsraum den Raum $\Gamma(V \xrightarrow{\pi} Q)$ der Schnitte eines $U(1)$ -Vektorbündels $V \xrightarrow{\pi} Q$ mit typischer Faser \mathbb{C}^n über dem Konfigurationsraum Q , bzw. den Unterraum der quadratintegrierbaren Schnitte. Diese Betrachtungsweise möchte ich im 1. Abschnitt dieses Kapitels motivieren. Sie hat den großen Vorteil, dass die Geometrie des Konfigurationsraums direkten Einfluss auf die Geometrie des Darstellungsraums hat.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir kurz herleiten, wie der Konfigurationsraum eines Systems von zwei identischen Teilchen in \mathbb{R}^3 aussieht. Der interessante Teil dieses Konfigurationsraumes, der die Information über die Ununterscheidbarkeit der Teilchen trägt, ist ein projektiver Raum, der $\mathbb{R}P^2$.

Abschnitt 3 widmet wir der Konstruktion eines Atlas von $\mathbb{R}P^2$, den wir später zur Formulierung der Drehungen in $\mathbb{R}P^2$ brauchen. Dieser Atlas hilft uns aber auch dabei in Abschnitt 4 ein Maß für den $\mathbb{R}P^2$ zu definieren. Das Maß auf $\mathbb{R}P^2$ ist notwendig, um ein Skalarprodukt auf dem Raum der Schnitte eines \mathbb{C}^n -Vektorbündels über $\mathbb{R}P^2$ und damit eine Normierungsbedingung für die Repräsentanten quantenmechanischer Zustände definieren zu können.

In Abschnitt 5 werden wir herleiten, dass es nur zwei Geradenbündel² über $\mathbb{R}P^2$ und insbesondere zwei ausgezeichnete \mathbb{C}^n -Vektorbündel über $\mathbb{R}P^2$ gibt, die gerade den beiden möglichen Statistiken in 3 Dimensionen entsprechen, der Bose-Einstein-Statistik auf der einen und der Fermi-Dirac-Statistik auf der anderen Seite.

Wir schließen dieses Kapitel dann in Abschnitt 6 mit der Angabe der Hilberträume \mathcal{H}_+ und \mathcal{H}_- zu den verschiedenen Statistiken für zwei identische Teilchen.

1. Schnitte, Repräsentanten und $U(1)$ -Vektorbündel

Es mangelt in der Quantenmechanik nicht an Beispielen, in denen die globale Struktur des Konfigurationsraums Q eines Systems zu (messbaren) Phasenfaktoren führt. Das vielleicht berühmteste Beispiel ist der Aharonov-Bohm-Effekt [AB59], bei dem $Q \approx S^1$. Einen kanonischen Weg, diese globale Struktur in einen quantenmechanischen Darstellungsraum \mathcal{H} einzubauen, findet man in der Beschreibung durch \mathbb{C}^n -Vektorbündel über Q :

¹Wigner zeigt in seinem Buch [Wig31], in dem man auch den Originalbeweis seines Theorems findet, dass diejenigen Symmetrien, die auf antiunitäre Darstellungen führen, eine Zeitumkehr beinhalten; die orthochronen Transformationen, also solche, die die Zeitrichtung respektieren, führen hingegen auf unitäre Darstellungen.

²Wir bezeichnen in dieser Arbeit die Vektorbündel mit Faserdimension Eins (meist typische Faser \mathbb{C}) als *Geradenbündel*.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & V \\ & & \downarrow \pi \\ & & Q \end{array}$$

Da es je nach Konfigurationsraum auch nichttriviale Vektorbündel über Q gibt, sind die Elemente des Hilbertraums \mathcal{H} im Allgemeinen lokale Schnitte $a_k : U_k \rightarrow \pi^{-1}(U_k)$, ($U_k \subset Q$). Lokal gilt $\pi^{-1}(U_k) \cong U_k \times \mathbb{C}^n$, demnach ist für $n = 1$:

$$\begin{aligned} a_k : U_k &\rightarrow U_k \times \mathbb{C} \\ q &\mapsto a_k(q) = (q, \alpha_k(q)), \end{aligned}$$

wobei $\alpha_k : U_k \rightarrow \mathbb{C}$ eine lokale Ortswellenfunktion ist, die den Schnitt a_k eindeutig bestimmt. Wir können uns demnach die lokalen Schnitte des Bündels wie lokalisierte Ortswellenfunktionen vorstellen. Das bedeutet aber auch, dass sich der Repräsentant eines Gesamtzustandes in Q aus mehreren lokalen Schnitten $a_k : U_k \rightarrow \pi^{-1}(U_k)$ zusammensetzt. Dabei muss zum einen natürlich

$$Q \subset \bigcup_k U_k,$$

das heißt die U_k bilden eine Überdeckung von Q . Zum anderen müssen wir eine Normierungsbedingung für den Repräsentanten (U_k, a_k) des Gesamtzustandes formulieren. Dazu brauchen wir zunächst eine global definierte Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho : Q \rightarrow \mathbb{R}_+$, die auf jedem U_k mit dem "Betragsquadrat" von a_k übereinstimmen soll:

$$\rho(q) := \langle a_k(q) | a_k(q) \rangle \quad \forall q \in U_k.$$

Wir setzen dabei insbesondere voraus, dass es sich bei $V \xrightarrow{\pi} Q$ um ein *hermitesches Vektorbündel* handelt. Das ist ein Vektorbündel, in dem es auf jeder Faser $\pi^{-1}(q) \equiv \mathbb{C}_q^n$ eine hermitesche Struktur $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{C}_q^n \times \mathbb{C}_q^n \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, die benötigt wird, um ein Skalarprodukt zwischen den Schnitten definieren zu können.³ Damit nun $\rho : Q \rightarrow \mathbb{R}_+$ auch auf den Überlappungsgebieten $U_k \cap U_l$ wohldefiniert ist, müssen wir verlangen, dass es eine Funktion $\lambda_{kl} : U_k \cap U_l \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, sodass:

$$(73) \quad a_k(q) = \lambda_{kl}(q) a_l(q) \quad \forall q \in U_k \cap U_l,$$

dann ist nämlich (wir unterdrücken die Abhängigkeit von $q \in U_k \cap U_l$):

$$\rho = \langle a_k | a_k \rangle = \langle \lambda_{kl} a_l | \lambda_{kl} a_l \rangle = \overline{\lambda_{kl}} \lambda_{kl} \langle a_l | a_l \rangle = \langle a_l | a_l \rangle \quad \forall k, l$$

und wir erhalten die Normierungsbedingung für den Repräsentanten (U_k, a_k) :

$$(74) \quad \int_Q \rho(q) d\mu(q) = 1.$$

Dabei setzen wir voraus, dass die Funktion $\rho : Q \rightarrow \mathbb{R}_+$ über Q integrierbar ist, das bedeutet die Schnitte müssen *quadratintegrabel* sein. Insbesondere setzt das natürlich voraus, dass wir überhaupt erst ein *Maß auf Q* definieren können.⁴

³Wir verwenden hier das selbe Symbol $\langle \cdot | \cdot \rangle$ für die hermitesche Struktur auf den Fasern, das wir zuvor für das Skalarprodukt zwischen Hilbertraumvektoren verwendet hatten. Es sei deshalb darauf hingewiesen, dass $\langle a_k(q) | a_k(q) \rangle$ tatsächlich nur dem Betragsquadrat $|\alpha_k(q)|^2 = \overline{\alpha_k(q)} \alpha_k(q)$ der Wellenfunktionen entspricht, und nicht etwa dem Skalarprodukt zwischen Repräsentanten. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ist hier also lediglich ein *lokales Skalarprodukt*.

⁴vgl. Abschnitt 4

Physikalisch gesprochen beschreibt Gleichung (73) eine *lokale Eichtransformation*. In der Sprache der Vektorbündel sind das Vektorbündelautomorphismen $\lambda \in \text{Aut}_Q(V)$, die jede Faser auf sich selbst abbilden:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\lambda} & V \\ & & \searrow \pi & & \swarrow \pi \\ & & & & Q \end{array}$$

Insbesondere müssen die Fasern in unserem Fall wegen $\lambda_{kl}(q) \in U(1) \forall q \in Q$ eine $U(1)$ -Wirkung zulassen. Etwas salopp formuliert können wir die Gleichung (73) auch als Vorschrift für das "Zusammenheften" der lokalen Schnitte bezeichnen.

Die hier vorgestellte Betrachtung von Schnitten über einem \mathbb{C}^n -Vektorbündel als (lokale) Repräsentanten beinhaltet bereits viele Eigenarten der Quantenmechanik, wie z.B. die Lokalität der Wellenfunktionen, oder die lokalen $U(1)$ -Eichtransformationen. Überdies ermöglicht es uns diese Sichtweise, die Geometrie des Konfigurationsraums von Anfang an in die quantenmechanische Beschreibung des Systems mit einzubauen. Betrachten wir nun also speziell den Konfigurationsraum des hier zu beschreibenden Systems von zwei identischen Teilchen.

2. Konfigurationsraum für zwei identische Teilchen

Wir betrachten zwei identische Punktteilchen im \mathbb{R}^3 . Der klassische Konfigurationsraum dieses Systems ist dann gegeben durch:

$$\tilde{Q}_2 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \Delta,$$

wobei Δ die Diagonale

$$\Delta := \{(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in \mathbb{R}^6 : \vec{x}_1 = \vec{x}_2\}$$

bezeichnet. Die beiden Punktteilchen können sich also nicht am selben Ort aufhalten, aber, zumindest in der klassischen Mechanik, durchaus unterschieden werden. Dem ist nicht so in der Quantenmechanik, wo die beiden Konfigurationen (\vec{x}_1, \vec{x}_2) und (\vec{x}_2, \vec{x}_1) ununterscheidbar sind. Der Konfigurationsraum wird also zum Orbitraum der symmetrischen Gruppe \mathbb{S}_2 auf \tilde{Q}_2 . Wir haben demnach

$$Q_2 = \tilde{Q}_2 / \mathbb{S}_2$$

als Konfigurationsraum von zwei identischen Teilchen. Zerlegen wir nun den klassischen Konfigurationsraum \tilde{Q}_2 in Schwerpunkts- (CM) und Relativkoordinaten, und schreiben die Relativkoordinaten gleich in Kugelkoordinaten, so erhalten wir:

$$\tilde{Q}_2 = \mathbb{R}_{\text{CM}}^3 \times (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times S^2.$$

Die Wirkung der symmetrischen Gruppe \mathbb{S}_2 auf \tilde{Q}_2 lässt natürlich sowohl Schwerpunkt, als auch den Abstand $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ der beiden Teilchen invariant. Alles was in \tilde{Q}_2 , gegeben in der obigen Form, durch den Übergang zum Orbitraum der Wirkung der \mathbb{S}_2 passiert, ist die Identifikation der Antipoden der Sphäre:

$$(75) \quad Q_2 = \tilde{Q}_2 / \mathbb{S}_2 = \mathbb{R}_S^3 \times (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times (S^2 / \mathbb{Z}_2).$$

Der interessante Teil des quantenmechanischen Konfigurationsraums von zwei identischen Teilchen ist also der Quotient

$$S^2 / \mathbb{Z}_2 \approx \mathbb{R}P^2,$$

die projektive Ebene.

Wir werden im Folgenden die Schwerpunktskoordinaten abseparieren, auch der Abstand der Teilchen soll uns nicht weiter interessieren. Wir begeben uns also in das Schwerpunktsystem und betrachten $\mathbb{R}P^2$ selbst als Konfigurationsraum für zwei identische Teilchen.

Wie in der Einleitung bereits angedeutet, ist es der projektive Charakter dieses Konfigurationsraums, der letztlich die strikte Unterscheidung in Fermi-Dirac- und Bose-Einstein-Statistik zur Folge hat. Wir werden diesen Zusammenhang in Abschnitt 5 herleiten. Zuvor wollen wir uns allerdings noch mit der Geometrie des Konfigurationsraums $\mathbb{R}P^2$, seinen Karten und der Definition eines Maßes auf $\mathbb{R}P^2$ beschäftigen.

3. Die kartesischen Karten des $\mathbb{R}P^2$

Die projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ ist die Zentralprojektion des kartesischen \mathbb{R}^3 , das heißt $\mathbb{R}P^2$ ist der Orbitraum unter der Wirkung der Einheitengruppe \mathbb{R}^\times auf \mathbb{R}^3 :

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^\times.$$

Nun hat der \mathbb{R}^3 eine kanonische Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ und eine triviale, globale Karte, die Identität. Sei also $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ die Darstellung eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, dann wird durch diesen, wie bereits im ersten Kapitel dieser Arbeit ausführlich dargestellt, eindeutig ein Strahl $\mathbf{x} \in \mathbb{R}P^2$ festgelegt. Die homogenen Koordinaten

$$\mathbf{x} = [x_1 : x_2 : x_3]$$

eines Punktes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}P^2$ sind nun bekanntlich nur bis auf einen Faktor $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ eindeutig bestimmt. Demnach ist

$$[x_1 : x_2 : x_3] = \left[\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1 \right] \quad \text{für } x_3 \neq 0$$

auch eine legitime Darstellung von \mathbf{x} . Die beiden Verhältnisse $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$ bestimmen den Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}P^2$ nun eindeutig. Wir haben also eine Kartenabbildung

$$(76) \quad \begin{aligned} \kappa_3 : \quad K_3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} = [x_1 : x_2 : x_3] &\mapsto \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right) =: (\gamma_1, \gamma_2) \end{aligned}$$

der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}P^2$ gewonnen. Wobei wir die unendlich ferne projektive Gerade g_3^∞ , das heißt die affine Ebene $x_3 = 0$, aus dem Kartengebiet K_3 ausschließen mussten. Der Definitionsbereich von κ_3 ist demnach $K_3 = \mathbb{R}P^2 \setminus g_3^\infty$. Die inverse Abbildung κ_3^{-1} erhält man durch:

$$\begin{aligned} \kappa_3^{-1} : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow K_3 \\ (\lambda, \mu) &\mapsto [\lambda : \mu : 1]. \end{aligned}$$

Ferner überprüft man sehr einfach, dass $\kappa_3 : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wohldefiniert ist. Denn es gilt für die homogenen Koordinaten auf der einen Seite $[\lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3] = [x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}P^2$ und für die lokalen Koordinaten auf der anderen $\left(\frac{\lambda x_1}{\lambda x_3}, \frac{\lambda x_2}{\lambda x_3} \right) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right) \in \mathbb{R}^2$. Für eine geometrische Anschauung der Kartenabbildung κ_3 betrachte man nochmals Abbildung 1 aus Kapitel I. Die Ebene $E \cong \mathbb{R}^2$ hatten wir dort bereits als Kartenebene bezeichnet, sie ist das Bild von $K_3 \subset \mathbb{R}P^2$ unter κ_3 .

Da nun die Karte (K_3, κ_3) nicht ausreicht, um die gesamte projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ abzubilden, brauchen wir offensichtlich noch weitere Karten. Eine kanonische Wahl für eine zweite Karte ist:

$$(77) \quad \begin{aligned} \kappa_2 : \quad \mathbb{R}P^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} = [x_1 : x_2 : x_3] &\mapsto \left(\frac{x_3}{x_2}, \frac{x_1}{x_2} \right) =: (\beta_1, \beta_2) \quad \text{falls } x_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Mit dieser Karte erreichen wir dann alle Strahlen, die nicht in der affinen $(x_2 = 0)$ -Ebene, also der (x_1, x_3) -Koordinatenebene liegen. Der einzige Punkt in $\mathbb{R}P^2$, den wir mit den Karten (K_2, κ_2) und (K_3, κ_3) noch nicht abbilden können, ist der Strahl, der der Schnittgeraden der $(x_2 = 0)$ - mit der $(x_3 = 0)$ -Ebene, also der x_1 -Achse entspricht. Ein Bild dieses Strahls erhalten wir in der dritten kartesischen Karte:

$$(78) \quad \begin{aligned} \kappa_1 : \quad \mathbb{R}P^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} = [x_1 : x_2 : x_3] &\mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \right) =: (\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{falls } x_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir also einen Atlas \mathfrak{A} für $\mathbb{R}P^2$ aus den kartesischen Koordinaten des \mathbb{R}^3 konstruiert:

$$\mathfrak{A} = \{(K_1, \kappa_1), (K_2, \kappa_2), (K_3, \kappa_3)\},$$

das heißt jeder Strahl $\mathbf{x} \in \mathbb{R}P^2$ liegt in mindestens einer der drei Kartengebiete K_1, K_2 oder K_3 . Die Kartengebiete sind dabei die Zentralprojektionen der Mengen $X_l := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_l \neq 0\}$:

$$(79) \quad K_l = \mathcal{P}(X_l) = X_l / \mathbb{R}^\times.$$

Es bleiben noch die Kartenwechsel zu berechnen. Für den Kartenwechsel in $K_1 \cap K_2$ lesen wir aus (77) und (78) ab:

$$(80) \quad \alpha_1 = \frac{1}{\beta_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \quad \text{und} \quad \beta_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{für } x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0,$$

für das Gebiet $K_2 \cap K_3$ haben wir:

$$(81) \quad \beta_1 = \frac{1}{\gamma_2}, \quad \beta_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \quad \text{und} \quad \gamma_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\beta_1} \quad \text{für } x_2 \neq 0 \wedge x_3 \neq 0$$

und schließlich für $K_3 \cap K_1$:

$$(82) \quad \gamma_1 = \frac{1}{\alpha_2}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\gamma_1} \quad \text{für } x_3 \neq 0 \wedge x_1 \neq 0.$$

In Abbildung 1 findet man eine geometrische Darstellung des Kartenwechsels $(K_1, \kappa_1) \leftrightarrow (K_3, \kappa_3)$. Das Kartengebiet $K_1 \subset \mathbb{R}P^2$ besteht dabei aus allen Strahlen, die nicht in der grünen Ebene liegen; $K_3 \subset \mathbb{R}P^2$ besteht aus allen Strahlen, die nicht in der blauen Ebene liegen.

Wir können nun diese Kartengebiete und -abbildungen dazu verwenden, um ein Maß für die (nicht orientierbare) projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ zu definieren.

4. Ein Maß für $\mathbb{R}P^2$

Betrachten wir speziell das Kartengebiet $K_3 \subset \mathbb{R}P^2$. Das ist nach der Diskussion im vorigen Abschnitt fast der gesamte $\mathbb{R}P^2$, außer den Strahlen, die in der $(x_3 = 0)$ -Ebene liegen, also in der unendlich fernen Geraden g_3^∞ . Nun ist diese "unendlich ferne Gerade" insbesondere ein projektiver Raum der Dimension Eins. Da die projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$, für die wir ein Maß definieren wollen, zweidimensional ist, sollte die unendlich ferne Gerade g_3^∞ bezüglich eines sinnvollen Maßes μ in $\mathbb{R}P^2$ also eine Nullmenge sein: $\mu(g_3^\infty) = 0$. Für die Integration auf $\mathbb{R}P^2$ reicht es demnach aus, ein

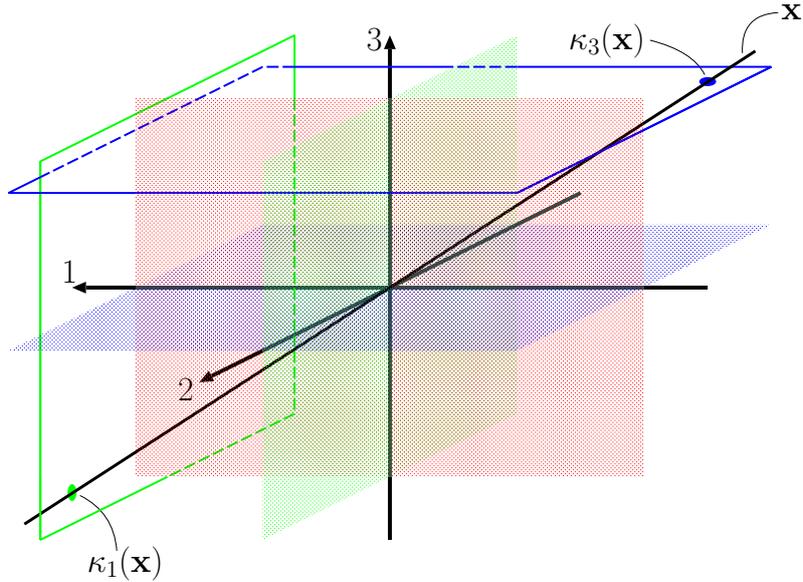


ABBILDUNG 1. Der Kartenwechsel in zwei der drei kartesischen Karten des $\mathbb{R}P^2$.

Maß auf $K_3 = \mathbb{R}P^2 \setminus g_3^\infty$ zu definieren. Wir betrachten dazu den $\mathbb{R}P^2$ als Orbitraum der \mathbb{Z}_2 auf S^2 :

$$\mathbb{R}P^2 = S^2 / \mathbb{Z}_2 .$$

Seien dann (θ, ϕ) , $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi[$ die Koordinaten auf S^2 und sei ferner

$$\begin{aligned} S^2 \times \mathbb{Z}_2 &\rightarrow S^2 \\ ((\theta, \phi), 1) &\mapsto (\theta, \phi) \\ ((\theta, \phi), -1) &\mapsto (\pi - \theta, \phi + \pi) \end{aligned}$$

die Wirkung der \mathbb{Z}_2 auf der Sphäre. Dann sind die Punkte des $\mathbb{R}P^2$ gegeben durch die Äquivalenzklassen

$$[\theta, \phi] := \{(\theta, \phi), (\pi - \theta, \phi + \pi)\} .$$

Dem Kartengebiet K_3 entspricht dann der Orbitraum von \mathbb{Z}_2 auf der Menge $\mathcal{X}_3 := S^2 \setminus \mathcal{A}$, der Sphäre ohne den Äquator $\mathcal{A} = \{(\theta, \phi) \in S^2 : \theta = \frac{\pi}{2}\}$:

$$(83) \quad K_3 = \mathcal{X}_3 / \mathbb{Z}_2 = (S^2 \setminus \mathcal{A}) / \mathbb{Z}_2$$

(vgl. (79)). Die unendlich ferne Gerade ist dann $g_3^\infty = \mathcal{A} / \mathbb{Z}_2 \approx S^1$.

Jedem Punkt in K_3 entspricht demnach genau ein Punkt auf der offenen Nordhalbkugel

$$H := \left\{ (\theta, \phi) \in S^2 : \theta > \frac{\pi}{2} \right\} .$$

Und es gibt eine bijektive Abbildung

$$(84) \quad \begin{aligned} h : \mathbb{R}P^2 \supset K_3 &\rightarrow H \subset S^2 \\ [\theta, \phi] &\mapsto h([\theta, \phi]) = \begin{cases} (\theta, \phi) & \text{falls } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ (\pi - \theta, \phi + \pi) & \text{falls } \theta \notin [0, \frac{\pi}{2}[\end{cases} , \end{aligned}$$

(vgl. Abbildung 2 (a)).

Wir müssen nun überprüfen, ob die in (84) definierte Abbildung tatsächlich wohldefiniert ist. Zunächst stellt man fest, dass für einen Strahl $\mathbf{x} = [\theta, \phi] = \{(\theta, \phi), (\theta', \phi')\}$ nicht gleichzeitig $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ und $\theta' \in [0, \frac{\pi}{2}[$ gelten kann, denn die Äquivalenzklassen in $[\theta, \phi]$ bestehen immer aus

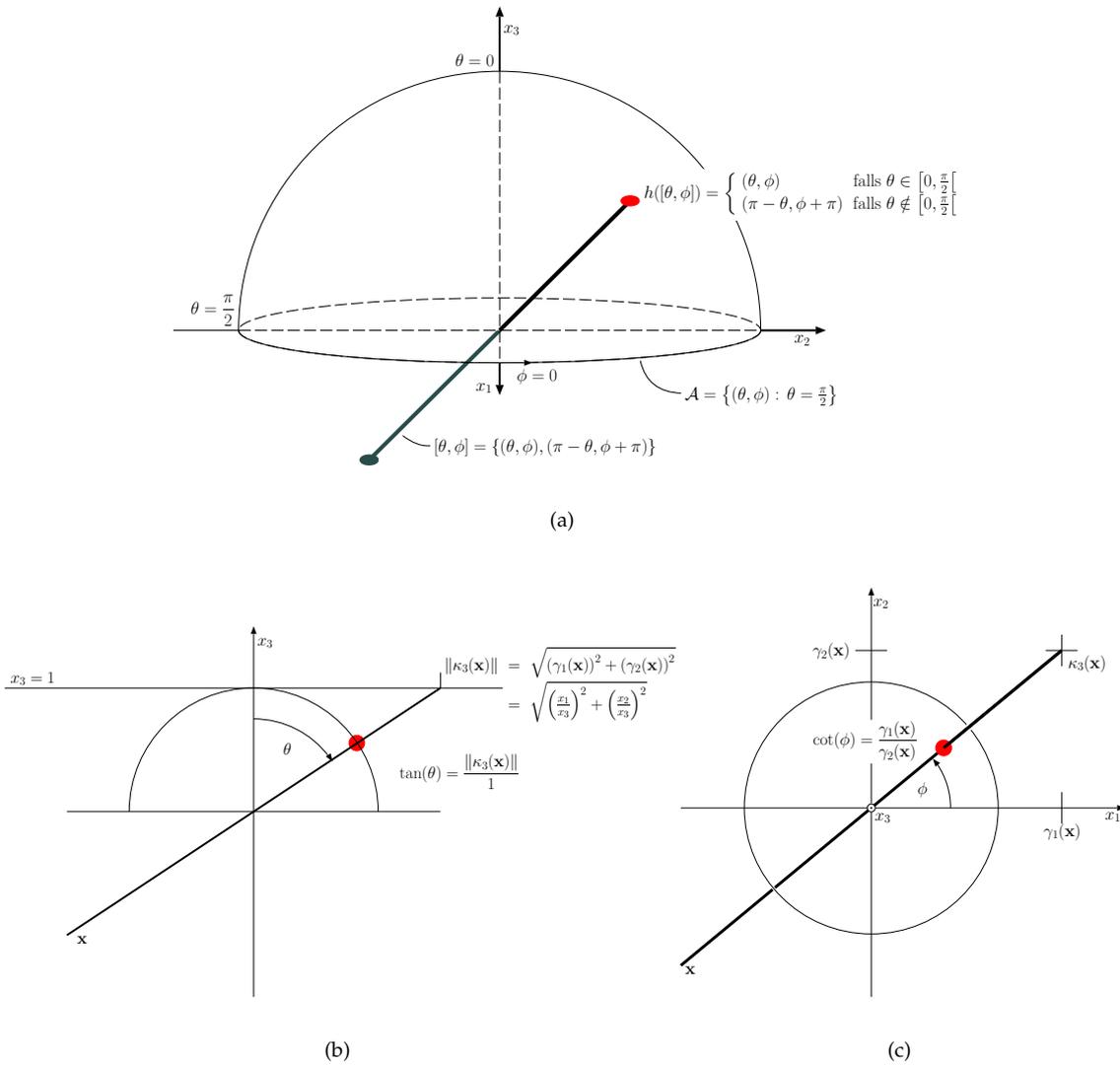


ABBILDUNG 2. Ein Maß für den $\mathbb{R}P^2$.

genau zwei Antipodenpunkten. Außerdem ist wegen $\mathbf{x} = [\theta, \phi] \in K_3 = (S^2 \setminus \mathcal{A}) / \mathbb{Z}_2$ der Äquator aus der Definitionsmenge ausgeschlossen, d.h. $\theta, \theta' \neq \frac{\pi}{2}$.

Wir können nun aber $h([\theta, \phi])$ auch durch die lokalen Koordinaten $\kappa_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\mathbf{x}) \\ \gamma_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ des Strahls \mathbf{x} ausdrücken. Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, sind diese für jeden Strahl in K_3 eindeutig definiert. Man macht sich anhand der Abbildungen 2 (b) und (c) klar, dass⁵

$$\theta(\mathbf{x}) = |\tan^{-1}(\|\kappa_3(\mathbf{x})\|)| \quad \text{und} \quad \phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \cot^{-1}\left(\frac{\gamma_1(\mathbf{x})}{\gamma_2(\mathbf{x})}\right) & \text{falls } \gamma_2(\mathbf{x}) \geq 0 \\ \cot^{-1}\left(\frac{\gamma_1(\mathbf{x})}{\gamma_2(\mathbf{x})}\right) + \pi & \text{falls } \gamma_2(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}.$$

Es ist also $\theta(\mathbf{x}) \in [0, \frac{\pi}{2}[$ und $\phi(\mathbf{x}) \in [0, 2\pi[$, wie wir es wollen. Damit haben wir

$$h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \theta(\gamma_1(\mathbf{x}), \gamma_2(\mathbf{x})) \\ \phi(\gamma_1(\mathbf{x}), \gamma_2(\mathbf{x})) \end{pmatrix},$$

⁵Beachte: $\cot^{-1}(\infty) = 0$; $\cot^{-1}(-\infty) = \pi$

eine offensichtlich wohldefinierte Funktion $h : \mathbb{R}P^2 \supset K_3 \rightarrow H \subset S^2$.

Ein Maß auf S^2 ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} \mu_{S^2} : \mathcal{B}(S^2) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ B &\mapsto \mu_{S^2}(B) := \int_B d\Omega = \int_B \sin(\theta) d\theta d\phi \end{aligned}$$

für alle messbaren Mengen $B \in \mathcal{B}(S^2)$. Wir können demnach mit Hilfe der Abbildung $h : K_3 \rightarrow H$ ein Maß μ_3 auf K_3 definieren:

$$\mu_3(\tilde{B}) := \int_{h(\tilde{B})} d\Omega,$$

und nennen eine Teilmenge $\tilde{B} \subset K_3$ messbar, falls $h(\tilde{B}) \subset S^2$ messbar ist. Nun ist nach obiger Argumentation $\mathbb{R}P^2 = K_3 \cup g_3^\infty$. Wollten wir nun h auf $\mathbb{R}P^2$ ausweiten, so müsste in jedem Fall aus Gründen der Eindeutigkeit $h(g_3^\infty) \subset \mathcal{A}$ gelten. Der Äquator \mathcal{A} ist aber eine Nullmenge bezüglich μ_{S^2} , wir können also g_3^∞ , wie schon zu Anfang vorgeschlagen, als Nullmenge bezüglich μ_3 festlegen. Wir haben dann

$$\mu_3(\mathbb{R}P^2) = \mu_3(K_3) + \mu_3(g_3^\infty) \stackrel{0}{=} \int_{h(K_3)} d\Omega = \int_H d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) d\theta d\phi = 2\pi.$$

Der große Vorteil dieses Maßes ist, dass es invariant unter Drehungen, d.h. invariant unter der Wirkung von $SU(2)$ ist. Drehen wir beispielsweise ein Bündel von Strahlen, d.h. einen vollen Doppelkegel mit Knotenpunkt im Ursprung um eine beliebige Achse, so wird sich der Flächeninhalt der Schnittfläche dieses Doppelkegels mit der Nordhalbkugel nicht ändern. Wir definieren also ein Maß auf $\mathbb{R}P^2$ durch:

$$(85) \quad \boxed{\mu := \mu_3}.$$

Es ist aus der obigen Konstruktion von μ_3 klar, dass μ durch (85) streng genommen nicht für alle messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}P^2$ definiert ist. Allerdings liegen die Teilmengen, für die μ nicht definiert ist, alle in der unendlich fernen Geraden g_3^∞ und sind demnach vom Maß Null.

Nachdem wir nun die mehr mathematischen Voraussetzungen für alle Betrachtungen, die wir innerhalb des $\mathbb{R}P^2$ anstellen werden, beisammen haben, wollen wir uns nun den Vektorbündeln über der projektiven Ebene zuwenden.

5. Zwei Vektorbündel über $\mathbb{R}P^2$

Die Fragen, mit denen wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen wollen, sind:

- Gibt es ein Vektorbündel mit typischer Faser \mathbb{C}^n über $\mathbb{R}P^2$?
- Wenn ja, gibt es genau eins?
- Wie sehen die Bündel aus, und zu welchen Pribzipalbündel(n) sind sie assoziiert?

Beschränken wir uns der Einfachheit halber zunächst auf Geradenbündel über $\mathbb{R}P^2$, so können wir die ersten beiden Fragen sehr schnell beantworten: Ja, es gibt ein Geradenbündel über dem $\mathbb{R}P^2$, und nein, es ist nicht eindeutig.

Bezeichne nämlich $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2)$ die Gruppe von Äquivalenzklassen isomorpher Geradenbündel über $\mathbb{R}P^2$ mit typischer Faser \mathbb{C} , dann ist

$$(86) \quad \boxed{\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2}.$$

LITERATURBEWEIS. Sei $H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z})$ die zweite Kohomologiegruppe von $\mathbb{R}P^2$ mit Koeffizienten in \mathbb{Z} . Dann ist nach [Hat03, S. 86, Prop. 3.10]:

$$\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2) \cong H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) .$$

Des weiteren ist aber

$$H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 ,$$

siehe beispielsweise [EGH80, S. 241]. Damit folgt direkt die Behauptung. □

Das bedeutet also, es gibt zwei Klassen isomorpher Geradenbündel über $\mathbb{R}P^2$. Diesen Sachverhalt können wir nun aber auch ohne den Formalismus der homologischen Algebra verstehen. Wir betrachten dazu die universelle Überlagerung

$$\mathbb{Z}_2 \rightarrow S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$$

der projektiven Ebene. Diese Überlagerung bildet ein Prinzipalbündel. Die Wirkung von \mathbb{Z}_2 auf $\mathbb{R}P^2$ ist frei⁶ und wir dürfen davon ausgehen, dass es zu diesem Bündel auch eine \mathbb{Z}_2 -äquivariante lokale Trivialisierungen gibt, ohne diese explizit angeben zu wollen.⁷

Betrachten wir also das Prinzipalbündel

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & S^2 \\ & & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Die Gruppe \mathbb{Z}_2 hat nun zwei natürliche Wirkungen auf \mathbb{C}^n , die triviale Wirkung und die Wirkung mit Vorzeichen:

$$(87) \quad \begin{array}{ccc} \tau : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ (+1, v) & \mapsto & v \\ (-1, v) & \mapsto & v \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \varsigma : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ (+1, v) & \mapsto & v \\ (-1, v) & \mapsto & -v \end{array} .$$

Aus diesen beiden Wirkungen erwachsen nun zwei assoziierte \mathbb{C}^n -Vektorbündel, ein triviales Bündel zur trivialen Wirkung τ und ein "verdrehtes" Bündel zur nichttrivialen Wirkung ς . Die Elemente des trivialen Bündels sind dabei die Äquivalenzklassen bezüglich der Wirkung τ auf \mathbb{C}^n :

$$\begin{aligned} [p, v]_{\tau} &= \{(p', v') \in S^2 \times \mathbb{C}^n : (p', v') = (pz, \tau(z^{-1})v) , z \in \mathbb{Z}_2\} \\ &= \{(p, v), (-p, v)\} \\ &= (\mathbf{p}, v) . \end{aligned}$$

mit \mathbf{p} einem Element aus $\mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$. Wir haben also als Totalraum des trivialen Bündels:

$$E_+ = (S^2 \times \mathbb{C}^n) / (\mathbb{Z}_2, \tau) = \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{C}^n .$$

⁶Jeder Punkt der Sphäre hat eine Antipode, es ist also kein Punkt der S^2 invariant unter der Wirkung von \mathbb{Z}_2 .

⁷Eine Definition des Prinzipalbündels findet man in Anhang D.

Im Falle der nichttrivialen Wirkung ς von \mathbb{Z}_2 auf \mathbb{C} erhalten wir als Äquivalenzklassen:⁸

$$(88) \quad \begin{aligned} [p, v]_{\varsigma} &= \{(p', v') \in S^2 \times \mathbb{C}^n : (p', v') = (pz, \varsigma(z^{-1})v), z \in \mathbb{Z}_2\} \\ &= \{(p, v), (-p, -v)\}. \end{aligned}$$

Die Projektion π_- dieser Elemente auf den $\mathbb{R}P^2$ ist gegeben durch:

$$\pi_-([p, v]_{\varsigma}) = [p] = \mathbf{p}.$$

Sie ist eindeutig, da offensichtlich $[p] = [-p] = \mathbf{p}$. Wir schreiben abkürzend $\mathbb{R}P^2 \tilde{\times} \mathbb{C}^n$ für den Totalraum des nicht-trivialen Bündels. Die Fasern dieses Bündels sind gegeben durch:

$$(89) \quad \begin{aligned} \pi_-^{-1}(\mathbf{p}) &= \{[p, v]_{\varsigma} \in \mathbb{R}P^2 \tilde{\times} \mathbb{C}^n : v \in \mathbb{C}^n, [p] = \mathbf{p} \in \mathbb{R}P^2\} \\ &= \{(p, v), (-p, -v)\} : v \in \mathbb{C}^n, [p] \in \mathbb{R}P^2\}. \end{aligned}$$

Diese Fasern sind isomorph zum \mathbb{C}^n . Auf der einen Seite sind die obigen Äquivalenzklassen (88) verschieden, wenn wir zwei verschiedene Vektoren $v, v' \in \mathbb{C}^n$ wählen:

$$[p, v]_{\varsigma} \neq [p, v']_{\varsigma} \Leftrightarrow v \neq v',$$

und auf der anderen Seite gehören beide Elemente zur selben Faser (89). Demnach enthält jede Faser genauso viele Elemente wie \mathbb{C}^n . Des weiteren induziert die Vektorraumstruktur von \mathbb{C}^n auch eine Vektorraumstruktur auf den Fasern:

$$\alpha [p, v]_{\varsigma} + \beta [p, w]_{\varsigma} := [p, \alpha v + \beta w]_{\varsigma}.$$

Insgesamt haben wir also die beiden \mathbb{C}^n -Vektorbündel:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{C}^n \\ & & \downarrow \pi_+ \\ & & \mathbb{R}P^2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}P^2 \tilde{\times} \mathbb{C}^n \\ & & \downarrow \pi_- \\ & & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Wir führen die Bezeichnungen V_+ für das linke, triviale Bündel; und V_- für das rechte, verdrehte Bündel ein.

Man beachte, dass wir auf den Fasern der beiden Bündel V_+ und V_- eine offensichtliche $U(1)$ -Wirkung haben:

$$\begin{aligned} U(1) \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (e^{i\varphi}, v) &\mapsto e^{i\varphi}v, \end{aligned}$$

die die \mathbb{Z}_2 -Wirkung wegen $\mathbb{Z}_2 \subset U(1)$ überdeckt. Zwischen den Schnitten in $\Gamma(V_+)$ bzw. $\Gamma(V_-)$ können also durchaus lokale Eichtransformationen der Form (73) definiert werden.

Betrachten wir nun also die Schnitte der beiden Bündel V_+ und V_- etwas genauer. In Anhang D wird die bijektive Beziehung der Schnitte eines assoziierten Bündels $P \times_K F$ zu den äquivarianten Funktionen $\psi : P \rightarrow F$ hergeleitet:

$$\Gamma(P \times_K F) \approx \{\psi \in C^\infty(P, F) : \psi(pk) = k^{-1}(\psi(p)) \quad \forall k \in K\}.$$

⁸Es ist instruktiv sich für den Spezialfall $n = 1$ die Konstruktion des nicht-trivialen Geradenbündels L_- im Anhang E anzusehen. Man erhält es dort als "komplex-tautologisches" Bündel über $\mathbb{R}P^2$, das der Struktur nach die selben Äquivalenzklassen (88) als Elemente hat.

Wenden wir diese Korrespondenz auf unsere assoziierten Bündel an, so erhalten wir im trivialen Fall (Wirkung τ) eine Korrespondenz zwischen den Schnitten in $\Gamma(V_+)$ und den Funktionen

$$\{\psi \in C^\infty(S^2, \mathbb{C}^n) : \psi(-p) = \tau(-1)\psi(p) = \psi(p)\},$$

also den symmetrischen Funktionen auf S^2 . Im zweiten Fall (nichttriviale Wirkung ς) hingegen haben wir eine Korrespondenz der Schnitte in $\Gamma(V_-)$ zu den Funktionen

$$\{\psi \in C^\infty(S^2, \mathbb{C}^n) : \psi(-p) = \varsigma(-1)\psi(p) = -\psi(p)\},$$

also den antisymmetrischen Funktionen auf S^2 .

Diese Unterscheidung ist die Unterscheidung in fermionische und bosonische Wellenfunktionen, die hier direkt aus der Geometrie des Konfigurationsraums eines Systems von zwei identischen Teilchen folgt. Dass diese sogenannte Fermi-Bose-Alternative bereits in der Geometrie des Konfigurationsraums "kodiert" ist, ist spätestens seit 1971 bekannt. Damals wurde die Fermi-Bose-Alternative von Michael G. G. Laidlaw und Cécile Morette-DeWitt mit Hilfe des Feynman-Pfadintegral-Formalismus in nicht einfach zusammenhängenden Konfigurationsräumen hergeleitet [LD71]. Einen großen Anteil an der Entwicklung der entsprechenden mathematischen Hilfsmittel hatte auch Lawrence Schulmann [Sch68].

6. Zwei Hilberträume

Wir wollen in diesem Abschnitt nun nochmal die Ergebnisse dieses Kapitels zusammenfassen.

- Die Repräsentanten quantenmechanischer Zustände können auf geometrische Weise durch (lokale) Schnitte eines \mathbb{C}^n -Vektorbündels über dem quantenmechanischen Konfigurationsraum Q beschrieben werden.
- Der Konfigurationsraum eines Systems von zwei identischen Teilchen in \mathbb{R}^3 ist der $\mathbb{R}P^2$.
- Es gibt genau zwei \mathbb{C} -Geradenbündel und zwei natürliche \mathbb{C}^n -Vektorbündel über $\mathbb{R}P^2$.

Wir erhalten demnach zwei Hilberträume, den bosonischen Hilbertraum

$$\mathcal{H}_+ = L^2(\Gamma(V_+), \mu),$$

den Raum der bezüglich dem Maß μ quadratintegrablen Schnitte über dem trivialen \mathbb{C}^n -Vektorbündel V_+ ; und den fermionischen Hilbertraum

$$\mathcal{H}_- = L^2(\Gamma(V_-), \mu).$$

Der nächste Schritt ist nun, die $SU(2)$ -Wirkung auf diesen beiden Hilberträumen zu formulieren. Wir betrachten im nächsten Kapitel dazu aber zunächst die Wirkung der $SU(2)$ auf dem Basisraum $\mathbb{R}P^2$ und kommen im letzten Kapitel auf die Formulierung der $SU(2)$ -Wirkung auf \mathcal{H}_+ und \mathcal{H}_- zurück.

Drehungen auf $\mathbb{R}P^2$

Wir diskutieren in diesem Kapitel die $SU(2)$ -Wirkung auf der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$. Diese wird durch die Wirkung der $SU(2)$ auf \mathbb{R}^3 induziert. Die dreidimensionale Darstellung der $SU(2)$ ist dabei natürlich identisch mit der Darstellung der $SO(3)$ auf \mathbb{R}^3 . Wir rufen uns den Zusammenhang zwischen $SU(2)$ und $SO(3)$ im ersten Abschnitt nochmals in Erinnerung. Im zweiten Abschnitt formulieren wir dann die induzierten Drehungen auf der projektiven Ebene und leiten her, wie diese Transformationen in der jeweiligen kartesischen Karte des $\mathbb{R}P^2$ aussehen.

Es sei schon hier angemerkt, dass wir uns in erster Linie für die z -Komponente des Drehimpulsoperators interessieren, also die Erzeugende von Drehungen um die 3-Achse. Wir werden uns deshalb an den Stellen wo es die Rechnungen erleichtert, bzw. die Anschauung verbessert, auf die Diskussion der Drehungen um die 3-Achse beschränken.

1. Die Wirkung der $SU(2)$ auf \mathbb{R}^3

Die dreidimensionale Darstellung der $SU(2)$ erhält man aus der adjungierten Wirkung der $SU(2)$ auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$. Wir wollen diese Beziehung nun explizit ableiten.

Die $SU(2)$ besteht bekanntlich aus den unitären (2×2) -Matrizen mit komplexen Einträgen, deren Determinante Eins ergibt:

$$SU(2) = \{U \in GL(2, \mathbb{C}) : U^\dagger = U^{-1}, \det U = 1\} .$$

Aus diesen zwei Bedingungen folgt dann bekanntlich, dass die Parametermannigfaltigkeit der $SU(2)$ die 3-Sphäre S^3 ist. Der Tangentialraum an das neutrale Element $\mathbb{1}_2 \in SU(2)$, also die Liealgebra $\mathfrak{su}(2)$, ist demnach, als Tangentialraum an eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, isomorph zu \mathbb{R}^3 . Den Isomorphismus erhalten wir aus der allgemeinsten Form eines Elements der Liealgebra $\mathfrak{su}(2)$. Nun ist die $\mathfrak{su}(2)$ als Teilmenge von $GL(2, \mathbb{C})$ gegeben durch:¹

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : A^\dagger = -A, \text{Spur } A = 0\} .$$

Ein beliebiges Element aus $\mathfrak{su}(2)$ kann man deshalb in der Form

$$A = \begin{pmatrix} i\alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

¹Die Matrizen in $\mathfrak{su}(2)$ sind antihermitesch, da für alle $A \in \mathfrak{su}(2)$:

$$\begin{aligned} U^\dagger = \exp(A)^\dagger &= \exp(A)^{-1} = U^{-1} \\ \exp(A^\dagger) &= \exp(-A) \end{aligned}$$

gelten muss. Sie sind wegen

$$\exp \circ \text{Spur} = \det \circ \exp$$

überdies spurlos.

schreiben. Daraus lesen wir eine Basis von $\mathfrak{su}(2)$ ab:

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

das sind gerade die Paulimatrizen $\{\sigma_k\}$, multipliziert mit dem komplexen Faktor i . Wir erhalten demnach als Isomorphismus zwischen $\mathfrak{su}(2)$ und \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \rho: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathfrak{su}(2) \\ e_k &\mapsto i\sigma_k, \end{aligned}$$

mit $(e_k)_{k \in \{1,2,3\}}$, der kanonischen Basis des \mathbb{R}^3 und $(\sigma_k)_{k \in \{1,2,3\}}$,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

den Pauli-Spinmatrizen.

Wie oben bereits bemerkt ergibt sich die Wirkung der $SU(2)$ auf dem \mathbb{R}^3 nun durch die adjungierte Wirkung der $SU(2)$ auf ihrer Liealgebra:²

$$\begin{aligned} R: SU(2) \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (U, x) &\mapsto R(U, x) := \rho^{-1}(\text{Ad}_U(\rho(x))). \end{aligned}$$

Für die infinitesimale Wirkung der $SU(2)$ auf \mathbb{R}^3 erhalten wir also unter Vernachlässigung der Terme zweiter Ordnung in φ :

$$\begin{aligned} R\left(\exp\left(-\frac{i}{2}\varphi^k\sigma_k\right), x^l e_l\right) &= \rho^{-1}\left\{\exp\left(-\frac{i}{2}\varphi^k\sigma_k\right)\rho(x^l e_l)\exp\left(\frac{i}{2}\varphi^k\sigma_k\right)\right\} \\ &= \rho^{-1}\left\{\exp\left(-\frac{i}{2}\varphi^k\sigma_k\right)(x^l i\sigma_l)\exp\left(\frac{i}{2}\varphi^k\sigma_k\right)\right\} \\ &= \rho^{-1}\left\{\left(\mathbb{1}_2 - \frac{i}{2}\varphi^k\sigma_k\right)(ix^l\sigma_l)\left(\mathbb{1}_2 + \frac{i}{2}\varphi^k\sigma_k\right)\right\} + \mathcal{O}(\varphi\varphi) \rightarrow 0 \\ &= \rho^{-1}\left\{x^l i\sigma_l + \frac{1}{2}\varphi^k x^l \sigma_k \sigma_l - \frac{1}{2}x^l \varphi^k \sigma_l \sigma_k + \mathcal{O}(\varphi\varphi) \rightarrow 0\right\} \\ &= \rho^{-1}\left\{x^l i\sigma_l + \frac{1}{2}\varphi^k x^l [\sigma_k, \sigma_l]\right\}, \end{aligned}$$

²Wir bezeichnen ganz allgemein mit Ad_U das auf $T_e G \cong \mathcal{L}(G)$ eingeschränkte Differential der adjungierten Wirkung ad einer Gruppe G auf sich selbst:

$$\begin{aligned} \text{ad}: G \times G &\rightarrow G \\ (b, a) &\mapsto \text{ad}_b a := bab^{-1}, \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} (\text{ad}_b)_*: TG &\rightarrow TG \\ T_a G &\rightarrow T_{bab^{-1}} G \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \text{Ad}_b := (\text{ad}_b)_*|_{T_e G}: T_e G &\rightarrow T_e G \\ A &\rightarrow bAb^{-1}. \end{aligned}$$

woraus mit den bekannten Kommutatorrelationen für die Paulimatrizen: $[\sigma_k, \sigma_l] = 2i\varepsilon_{kl}^m \sigma_m$ folgt:

$$\begin{aligned}
 R\left(\exp\left(-\frac{i}{2}\varphi^k \sigma_k\right), x^l e_l\right) &= \rho^{-1} \{x^m i \sigma_m + \varepsilon_{kl}^m \varphi^k x^l i \sigma_m\} \\
 &= (x^m + \varepsilon_{kl}^m \varphi^k x^l) e_m \\
 &= \vec{x} + \vec{\varphi} \times \vec{x} \\
 (90) \qquad \qquad \qquad &= \vec{x} + \varphi (\hat{\varphi} \times \vec{x}),
 \end{aligned}$$

mit $\vec{\varphi} = \varphi^l e_l$ und $\varphi = \|\vec{\varphi}\|$. Gleichung (90) beschreibt eine infinitesimale $SO(3)$ -Drehung um die Achse $\hat{\varphi}$ mit (infinitesimalem) Drehwinkel φ . Die fundamentalen Vektorfelder

$$\begin{aligned}
 \vec{D} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 \vec{x} &\mapsto \vec{D}(\vec{x})
 \end{aligned}$$

der $SU(2)$ - und der $SO(3)$ -Wirkung auf \mathbb{R}^3 sind also gleich:

$$\begin{aligned}
 \vec{D}(\vec{x}) &:= \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} R\left(\exp\left(-\frac{i}{2}\varphi^k \sigma_k\right), x^l e_l\right) \right|_{\varphi=0} \\
 &= \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} [\vec{x} - \varphi (\hat{\varphi} \times \vec{x})] \right|_{\varphi=0} \\
 &= \hat{\varphi} \times \vec{x},
 \end{aligned}$$

Als Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ können wir die Vektorfelder der Drehungen um die Koordinatenachsen bekanntlich als Matrizen schreiben:

$$\begin{aligned}
 (\vec{D}_1) \equiv J_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = e_1 \times \vec{x} \\
 (\vec{D}_2) \equiv J_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} = e_2 \times \vec{x} \\
 (\vec{D}_3) \equiv J_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_3 \times \vec{x},
 \end{aligned}$$

die die Kommutatorrelationen

$$[J_k, J_l] = \varepsilon_{kl}^m J_m$$

erfüllen.

2. Induzierte Wirkung auf $\mathbb{R}P^2$

Wir betrachten nun die induzierte Wirkung des Dreh-Vektorfeldes

$$\begin{aligned}
 \vec{D} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 \vec{x} &\mapsto \vec{D}(\vec{x}) = \hat{\varphi} \times \vec{x}
 \end{aligned}$$

auf der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$. Der Anschaulichkeit wegen beschränken wir uns dabei zunächst auf Drehungen um die 3-Achse. Es ist also $\vec{D}_3(\vec{x}) = e_3 \times \vec{x} = -x_2 e_1 + x_1 e_2$ das zu betrachtende

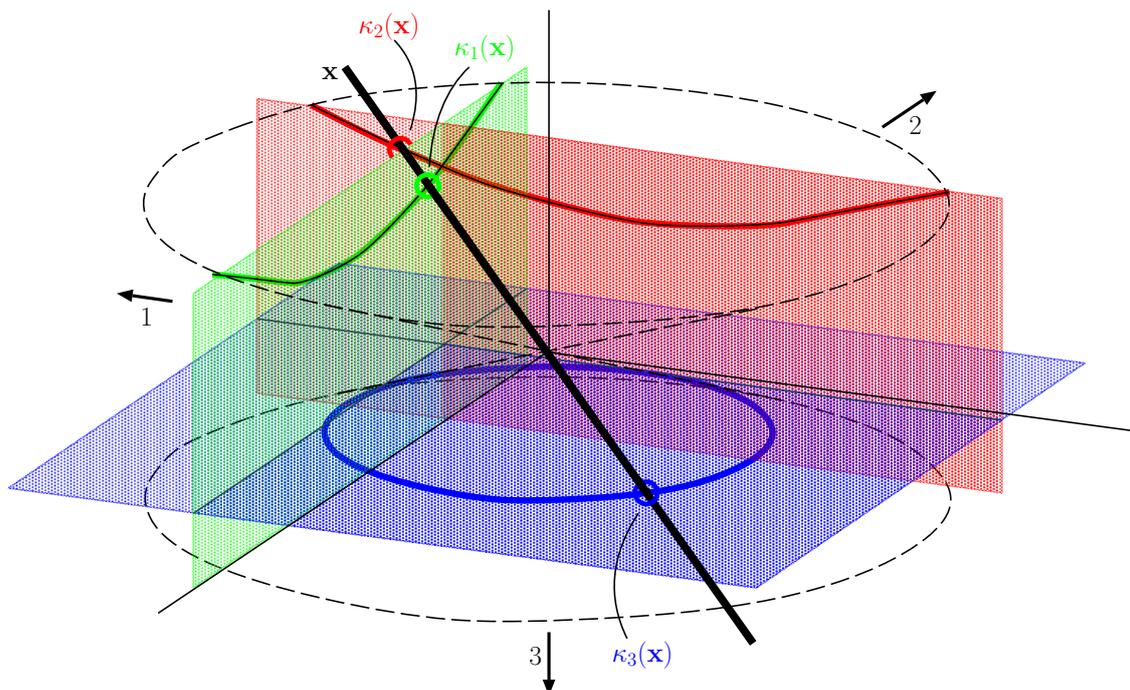


ABBILDUNG 1. Drehung eines Strahls um die 3-Achse. Die Durchstoßpunkte des Strahls durch die Koordinatenebenen, also die Koordinaten des Strahls bezüglich der jeweiligen Ebene, sind durch kleine Kreise gekennzeichnet. Es sind der Übersichtlichkeit wegen nur jeweils die oberen Äste der Hyperbeln gezeichnet.

Vektorfeld. In der Karte (K_3, κ_3) des $\mathbb{R}P^2$ iduziert dies die infinitesimale Transformation:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - \varphi x_2 & x_2 + \varphi x_1 \\ x_3 & x_3 \end{pmatrix} = (\gamma_1 - \varphi \gamma_2, \gamma_2 + \varphi \gamma_1)$$

bzw.

$$(91) \quad (\gamma_1(\mathbf{x}), \gamma_2(\mathbf{x})) \mapsto (\gamma_1(\mathbf{x}), \gamma_2(\mathbf{x})) + \varphi(-\gamma_2(\mathbf{x}), +\gamma_1(\mathbf{x})).$$

Für alle projektiven Punkte \mathbf{x} in K_3 ist $\left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \Big|_{\mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \gamma_2} \Big|_{\mathbf{x}} \right\}$ eine Basis des Tangentialraums $T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}P^2)$. In dieser Basis können wir die Darstellung des induzierten Vektorfeldes

$$\begin{aligned} \tilde{D}_3 : \mathbb{R}P^2 &\rightarrow T(\mathbb{R}P^2) \\ \mathbf{x} &\mapsto \tilde{D}_3(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

direkt aus der obigen infinitesimalen Wirkung (91) in $\text{im}(\kappa_3) = \mathbb{R}^2$ ablesen:

$$(92) \quad \tilde{D}_3(\mathbf{x}) = -\gamma_2(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \gamma_1} + \gamma_1(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \gamma_2} \quad \forall \mathbf{x} \in K_3.$$

Das ist das Vektorfeld einer Drehung um den Ursprung in $\text{im}(\kappa_3) \cong \mathbb{R}^2$. Das obige Vektorfeld dreht also den Durchstoßpunkt $\kappa_3(\mathbf{x})$ des Strahls in der Kartenebene $\kappa_3(K_3)$, also in der $(x_3 = 1)$ -Ebene. Was dabei in den beiden anderen Karten passiert, überlegt man sich anhand der Abbildung 1. Dreht man den Strahl \mathbf{x} um die 3-Achse, so überstreicht er die Oberfläche eines Kegels. Der Durchstoßpunkt $\kappa_3(\mathbf{x})$ in der blauen Kartenebene beschreibt dabei einen Kreis während sich die beiden anderen Durchstoßpunkte $\kappa_1(\mathbf{x})$ und $\kappa_2(\mathbf{x})$ auf den Schnittkurven des Kegels mit der jeweiligen Koordinatenebene $\text{im}(\kappa_1) = \{\vec{x} : x_1 = 1\}$ bzw. $\text{im}(\kappa_2) = \{\vec{x} : x_2 = 1\}$, also auf hyperbolischen Kurven bewegen.

Um dieses Ergebnis auch auf algebraischem Wege herzuleiten, führen wir in der Kartenebene $\text{im}(\kappa_3) = \{\vec{x} : x_3 = 1\}$ Polarkoordinaten $(R_3(\mathbf{x}), \phi_3(\mathbf{x}))$ ein. Dann ist (wir unterdrücken die Abhängigkeit von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}P^2$):

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_3 \cos(\phi_3) \\ R_3 \sin(\phi_3) \end{pmatrix},$$

und eine Drehung in der Koordinatenebene $\text{im}(\kappa_3)$ um den Winkel φ hat die besonders einfache Form:

$$(R_3(\mathbf{x}), \phi_3(\mathbf{x})) \mapsto (R_3(\mathbf{x}), \phi_3(\mathbf{x}) + \varphi)$$

mit dem erzeugenden Vektorfeld

$$\tilde{D}_3(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \phi_3} \Big|_{\kappa_3(\mathbf{x})}.$$

In kartesischen Koordinaten erhalten wir also für die Koordinaten des um φ gedrehten Strahls:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} (\phi_3 + \varphi) = \begin{pmatrix} R_3 \cos(\phi_3 + \varphi) \\ R_3 \sin(\phi_3 + \varphi) \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Kartenwechsel (81) und (82) erhält man daraus eine parameterabhängige Darstellung der Drehung in $\text{im}(\kappa_1)$ und $\text{im}(\kappa_2)$:

$$(93) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} (\phi_3 + \varphi) = \begin{pmatrix} \tan(\phi_3 + \varphi) \\ \frac{1}{R_3 \cos(\phi_3 + \varphi)} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} (\phi_3 + \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_3 \sin(\phi_3 + \varphi)} \\ \cot(\phi_3 + \varphi) \end{pmatrix}.$$

Das sind Parameterdarstellungen zweier Hyperbeln. Man prüft nach (wir unterdrücken das Argument $\phi_3 + \varphi$):

$$\left(\frac{\alpha_1}{R_3^{-1}} \right)^2 - \left(\frac{\alpha_2}{1} \right)^2 = \frac{\sin^2}{\cos^2} - \frac{1}{\cos^2} = \frac{\sin^2 - 1}{\cos^2} = -1$$

und

$$\left(\frac{\beta_1}{1} \right)^2 - \left(\frac{\beta_2}{R_3^{-1}} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2} - \frac{\cos^2}{\sin^2} = \frac{1 - \cos^2}{\sin^2} = 1.$$

Daraus liest man die Parameterwerte für die Abstände der Hyperbeläste und Brennpunkte ab, siehe Abbildung 2. Betrachten wir die obere (grüne) Hyperbel in Abbildung 2, also diejenige in der Kartenebene $\text{im}(\kappa_1)$. Bis auf eine Umbenennung der Koordinatenachsen hat diese die selbe Form wie die Hyperbel in $\text{im}(\kappa_2)$. Die feste Größe all unserer Kegelschnitte ist offensichtlich der Abstand der jeweiligen Kartenebene $x_k = 1$ vom Ursprung des \mathbb{R}^3 . Dieser Abstand wurde bei der Wahl der kartesischen Kartenabbildungen festgelegt. Er äußert sich in der Zeichnung in dem festen Abstand $a = 1$ (obere Hyperbel). Der zweite Parameter b der Hyperbel wird durch den Radius des Kreises in der $\text{im}(\kappa_3)$ -Kartenebene bestimmt ($b = \frac{1}{R_3}$). Je flacher der zu drehende Strahl ist, desto größer ist der Radius R_3 und desto flacher werden die Hyperbeln. Insbesondere überlegt man sich an diesem Bild das folgende: Nähert man sich mit dem zu drehenden Strahl der $(x_3 = 0)$ -Ebene, d.h. der unendlich fernen Gerade g_3^∞ , so gilt sicher $R_3 \rightarrow \infty$, und damit $b \rightarrow 0$. Auf der anderen Seite ändert sich nichts an dem Abstand $a = 1$ der Kartenebene, d.h. der Abstand des Brennpunktes vom Ursprung: $c = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow a = 1$. Wir erhalten demnach im Limes $R_3 \rightarrow \infty$ eine Darstellung der Drehung eines Strahls, der sich in der $(x_3 = 0)$ -Ebene befindet (vgl. (93)):

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan(\phi_3 + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cot(\phi_3 + \varphi) \end{pmatrix}.$$

Der Orbit dieses Strahls unter einer Drehung um die 3-Achse ist in der jeweiligen Kartenebene eine Linie entlang der α_1 - bzw. β_2 -Achse, dies wird auch in den obigen Gleichungen deutlich.

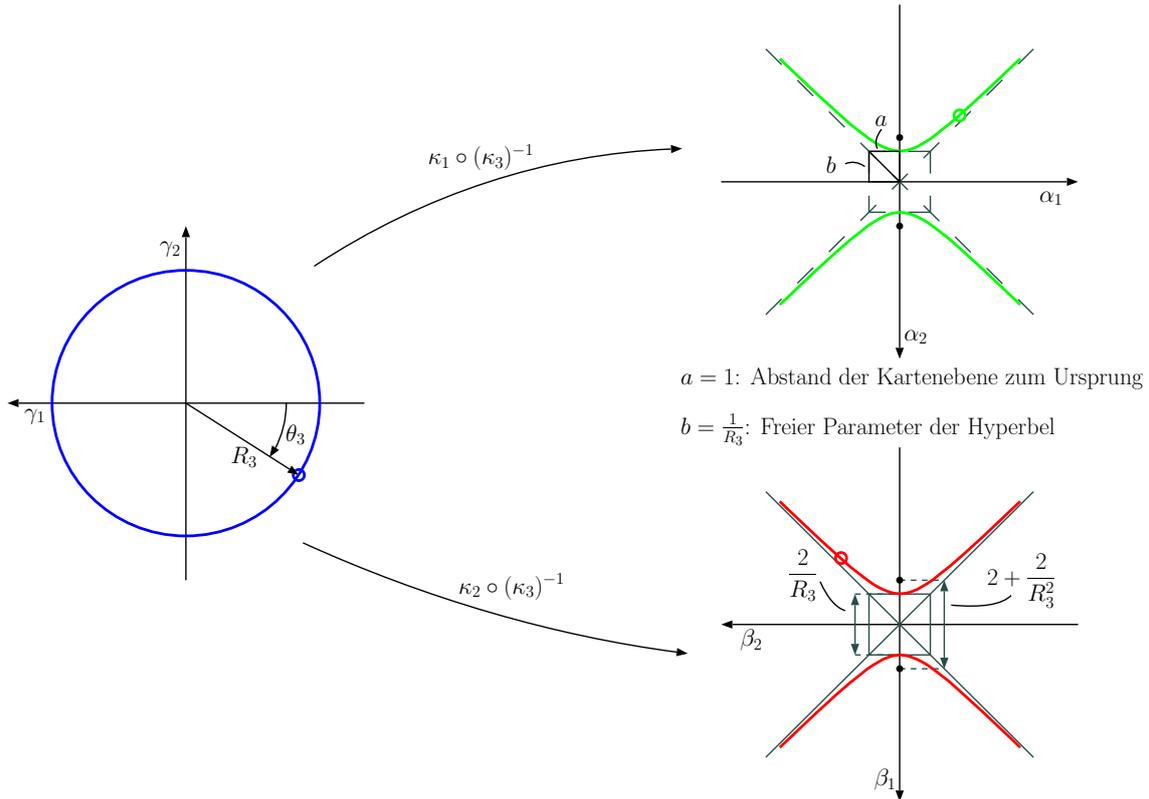


ABBILDUNG 2. Kartenwechsel bei der Drehung eines Strahls um die 3-Achse. Man beachte, dass die positive α_1 -Richtung auf der Kartenebene $x_1 = 1$ durch die 2-Richtung in Abbildung 1 gegeben ist, die positive α_2 -Richtung ist gegeben durch die 3-Richtung, schließlich ist $(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Entsprechendes gilt für die β_i -Richtungen: $(\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten eine offensichtlichere Parameterdarstellung der Hyperbeln und insbesondere eine lineare Darstellung für die Drehung um die 3-Achse in den Karten (K_1, κ_1) und (K_2, κ_2) , wenn wir eine Umparametrisierung der Hyperbel vornehmen. Für die erste Hyperbel gilt

$$\left(\frac{\alpha_1}{R_3^{-1}}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_2}{1}\right)^2 = -1,$$

wir können also Parameter $\theta, \vartheta \in \mathbb{R}$ finden, sodass

$$\left(\frac{\alpha_1(\phi_3 + \varphi)}{R_3^{-1}}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_2(\phi_3 + \varphi)}{1}\right)^2 = \sinh^2(\theta + \vartheta) - \cosh^2(\theta + \vartheta) = -1.$$

Da $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = R_3 \sin(\phi_3 + \varphi)$ müssten diese Parameter insbesondere die transzendente Gleichung

$$\sin(\phi_3 + \varphi) = \tanh(\theta + \vartheta)$$

erfüllen. Wir haben dann neue Koordinatenfunktionen, die von den neuen Parametern abhängen, die wir aber trotzdem mit den selben Buchstaben bezeichnen:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}_{(\theta+\vartheta)} = \begin{pmatrix} R_3 \sinh(\theta + \vartheta) \\ \cosh(\theta + \vartheta) \end{pmatrix}.$$

Da $\cosh(\theta + \vartheta) > 0 \forall \vartheta \in \mathbb{R}$, ist dies eine Darstellung des Hyperbelastes $\alpha_2 > 0$. Eine Darstellung des Astes $\alpha_2 < 0$ wäre dann:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}_{(\theta+\vartheta)} = - \begin{pmatrix} R_3 \sinh(\theta + \vartheta) \\ \cosh(\theta + \vartheta) \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir $\vartheta = 0$ als Anfangspunkt unserer Drehung, so wird eine Drehung um den Winkel φ in der Kartenebene $\text{im}(\kappa_1)$ beschrieben durch:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R_3 \sinh(\theta + \vartheta) \\ \cosh(\theta + \vartheta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_3 (\sinh(\theta) \cosh(\vartheta) + \cosh(\theta) \sinh(\vartheta)) \\ \cosh(\theta) \cosh(\vartheta) + \sinh(\theta) \sinh(\vartheta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\vartheta) & R_3 \sinh(\vartheta) \\ \frac{1}{R_3} \sinh(\vartheta) & \cosh(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_3 \sinh(\theta) \\ \cosh(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Drehwinkel φ lässt sich daraus zwar nicht mehr direkt ablesen (man erhält ihn aus der transzendenten Gleichung $\sin(\varphi) = \tanh(\vartheta)$), dafür sieht man deutlich, wie die Drehung in der Kartenebene $\text{im}(\kappa_1)$ wirkt:

$$(94) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}_{(\theta+\vartheta)} = \begin{pmatrix} \cosh(\vartheta) & R_3 \sinh(\vartheta) \\ \frac{1}{R_3} \sinh(\vartheta) & \cosh(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}_{\theta}.$$

Für die zweite Kartenebene erhalten wir aus

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = R_3 \cos(\phi_3 + \varphi) := R_3 \tanh(\theta + \vartheta)$$

die Parameterdarstellungen für die Äste $\beta_1 > 0$ bzw. $\beta_1 < 0$:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{(\theta+\vartheta)} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta + \vartheta) \\ R_3 \sinh(\theta + \vartheta) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{(\theta+\vartheta)} = - \begin{pmatrix} \cosh(\theta + \vartheta) \\ R_3 \sinh(\theta + \vartheta) \end{pmatrix}.$$

Die Drehung ist dann gegeben durch die lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cosh(\theta + \vartheta) \\ R_3 \sinh(\theta + \vartheta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh(\theta) \cosh(\vartheta) + \sinh(\theta) \sinh(\vartheta) \\ R_3 (\sinh(\theta) \cosh(\vartheta) + \cosh(\theta) \sinh(\vartheta)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\vartheta) & \frac{1}{R_3} \sinh(\vartheta) \\ R_3 \sinh(\vartheta) & \cosh(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\theta) \\ R_3 \sinh(\theta) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also gerade durch die zu der obigen Transformation transponierte Abbildung:

$$(95) \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{(\theta+\vartheta)} = \begin{pmatrix} \cosh(\vartheta) & \frac{1}{R_3} \sinh(\vartheta) \\ R_3 \sinh(\vartheta) & \cosh(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{\theta}.$$

Zwar wird durch die beiden Gleichungen der lineare Charakter der Transformationen deutlich, man sollte allerdings beachten, dass die Gleichungen nur innerhalb eines bestimmten Drehwinkelbereichs Gültigkeit behalten. Es wird immer nur ein Ast der jeweiligen Hyperbel beschrieben. Insbesondere sieht man, dass eine Drehung um die 3-Achse, wenn man sie in der Karte (K_1, κ_1) bzw. (K_2, κ_2) beschreibt, aus der Kartenebene $\text{im}(\kappa_1)$ bzw. $\text{im}(\kappa_2)$ herausführen kann.

Nachdem wir nun also die Drehungen von Strahlen in der projektiven Ebene ausführlich diskutiert haben, werden wir im nächsten Kapitel die Wirkung der $SU(2)$ auf den Vektorbündeln über $\mathbb{R}P^2$ beleuchten, um dann schließlich eine $SU(2)$ -Wirkung auf den Hilberträumen \mathcal{H}_+ und \mathcal{H}_- definieren zu können.

Lift der $SU(2)$ -Wirkung

Ziel dieses Kapitels ist die Formulierung einer $SU(2)$ -Wirkung auf den Hilberträumen \mathcal{H}_+ und \mathcal{H}_- zu Bose-Einstein- bzw. Fermi-Dirac-Statistik. Bevor wir jedoch mit der konkreten Hochhebung der $SU(2)$ -Wirkung beginnen können, müssen wir natürlich wissen, was man unter einer solchen Hochhebung versteht, und wie die generelle Strategie bei einer solchen Hochhebung ist. Wir werden deshalb den ersten Abschnitt dieses Kapitels einigen allgemeinen Definitionen und Überlegungen zur Hochhebung einer Gruppenwirkung widmen. Wir stellen dabei ein Schema vor, das von C. J. Isham in [Ish84, Abschnitt 5.2] beschrieben wird. Isham definiert dabei zunächst die Hochhebung in ein Prinzipalbündel und erhält daraus dann eine Gruppenwirkung auf den assoziierten Vektorbündeln. Im zweiten und dritten Abschnitt werden wir dieses Schema dann anwenden und konkrete Hochhebungen der $SU(2)$ -Wirkung in die Vektorbündel V_+ bzw. V_- konstruieren. Wie wir sehen werden, kann man aus diesen Hochhebungen dann direkt eine $SU(2)$ -Wirkung auf den Hilberträumen \mathcal{H}_+ bzw. \mathcal{H}_- definieren. Wir werden hier nur die einfachen Lifts der $SU(2)$ -Wirkung betrachten. Zum Abschluss dieses Kapitels und damit des zweiten Teils dieser Arbeit machen wir dann noch eine Bemerkung über die nicht-einfachen Lifts der $SU(2)$ -Wirkung, die der Startpunkt für die geometrische Formulierung von Drehungen von Spinoren sind. Für einen Einblick in die weitergehende Strategie bei der Analyse der Drehungen in \mathcal{H}_+ und \mathcal{H}_- und der Kuckertgleichung, sei an dieser Stelle dann auf den Ausblick verwiesen.

1. Hochhebung einer Gruppenwirkung

Die Hochhebung einer Gruppenwirkung in ein Faserbündel ist in einer Darstellung von C. J. Isham [Ish84] in zwei Teile zerlegt. Zunächst wird eine Gruppenwirkung auf dem assoziierten Prinzipalbündel P formuliert, die natürlich mit der Wirkung der Strukturgruppe verträglich sein muss. Daraus erhält man dann eine Gruppenwirkung auf den zu P assoziierten Vektorbündeln. Die Sichtweise, wie sie in Abschnitt VII.5 dargestellt ist, wird uns bei der konkreten Hochhebung der Gruppenwirkung in den folgenden Abschnitten also behilflich sein. Wir befassen uns aber zunächst mit dem allgemeinen Fall.

Sei also

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

ein Prinzipalbündel mit Strukturgruppe K .¹ Sei ferner

$$\begin{aligned} l: G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto l_g x \end{aligned}$$

eine Linkswirkung der Gruppe G auf dem Basisraum X . Sei des weiteren $\{t_g : g \in G\}$ eine Familie von Diffeomorphismen auf dem Totalraum:

$$t_g : P \rightarrow P.$$

Dann können wir definieren (vgl. [Ish84, S. 1227]):

DEFINITION IX.1 (Hochhebung in Prinzipalbündel). Die Familie $\{t_g : g \in G\}$ heißt *Hochhebung der Gruppenwirkung* oder *G-Lift* in das Prinzipalbündel P , falls

(i) die Wirkung auf dem Totalraum die Wirkung auf dem Basisraum überdeckt, d.h.

$$\pi \circ t_g = l_g \circ \pi \quad \forall g \in G,$$

(ii) $t : G \rightarrow \text{Diff}(P)$ eine *Linkswirkung* auf P darstellt, d.h.:

$$t_{g_2} \circ t_{g_1} = t_{g_2 g_1} \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

(iii) t_g für alle $g \in G$ ein *Automorphismus* des Prinzipalbündels ist, d.h. $t_g : P \rightarrow P$ bildet Fasern auf Fasern ab und ist mit der Rechtswirkung der Strukturgruppe K verträglich:

$$t_g(pk) = t_g(p)k \quad \forall k \in K \quad \forall g \in G.$$

Zusammenfassend können wir das in einem Diagramm ausdrücken:

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & P \xrightarrow{t_g} P \\ & & \downarrow \pi \qquad \downarrow \pi \\ & & X \xrightarrow{l_g} X \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} l_g &\in \text{Diff}(X) \\ t_g(pk) &= t_g(p)k \quad \forall k \in K \\ t_{g_2} \circ t_{g_1} &= t_{g_2 g_1}. \end{aligned}$$

Haben wir nun eine solche Hochhebung der G -Wirkung vorgegeben, so lässt sich eine einfache Wirkung von G auf dem assoziierten Vektorbündel $P \times_K \mathbb{C}^n$ definieren durch:

$$(96) \quad l_g^\uparrow [p, v] := [t_g(p), v]$$

mit $[p, v]$ den Äquivalenzklassen in $P \times_K \mathbb{C}^n$:

$$[p, v] = \{ (p', v') \in P \times \mathbb{C}^n : (p', v') = (pk, \chi(k^{-1})v), k \in K \},$$

wobei $\chi : K \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ eine Darstellung von K auf \mathbb{C}^n bezeichnet.

Auf dem assoziierten Vektorbündel gibt es dann eine kanonische Projektion auf den Basisraum X :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{C}^n} : P \times_K \mathbb{C}^n &\rightarrow X \\ [p, v] &\mapsto \pi_{\mathbb{C}^n}([p, v]) := \pi(p), \end{aligned}$$

die wegen $\pi(pk) = \pi(p) \forall k \in K$ wohldefiniert ist (die Strukturgruppe wirkt nur entlang der Fasern). Man überprüft sofort, dass die durch (96) definierte Wirkung auf $P \times_K \mathbb{C}^n$ die Wirkung auf dem Basisraum X überdeckt, d.h. die Faserstruktur des Bündels erhält:

$$(97) \quad \pi_{\mathbb{C}^n}(l_g^\uparrow [p, v]) = \pi_{\mathbb{C}^n}([t_g(p), v]) = \pi \circ t_g(p) = l_g \circ \pi(p) = l_g \circ \pi_{\mathbb{C}^n}([p, v]) \quad \forall [p, v] \in P \times_K \mathbb{C}^n.$$

¹Für die Definition eines Prinzipalbündels und die Beziehung zu den assoziierten Bündeln sei auf den Anhang D verwiesen.

Die Wirkung l_g^\uparrow ist also insbesondere ein Automorphismus des assoziierten Bündels. Außerdem ist $l^\uparrow : G \rightarrow \text{Aut}(P \times_K \mathbb{C}^n)$ ein Gruppenhomomorphismus:

$$(98) \quad l_{g_2}^\uparrow \circ l_{g_1}^\uparrow [p, v] = l_{g_2}^\uparrow [t_{g_1}(p), v] = [t_{g_2} \circ t_{g_1}(p), v] = [t_{g_2 g_1}(p), v] = l_{g_2 g_1}^\uparrow [p, v],$$

l_g^\uparrow definiert also eine Linkswirkung auf $P \times_K \mathbb{C}^n$. Ganz allgemein nennt man einen Gruppenhomomorphismus $l^\uparrow : G \rightarrow \text{Aut}(P \times_K \mathbb{C}^n)$ eine *Hochhebung von G in das assoziierte Bündel*.

Zusätzlich tragen die Fasern eines assoziierten Vektorbündels eine Vektorraumstruktur:

$$\alpha [p, v] + \beta [p, w] := [p, \alpha v + \beta w] \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

und wir verlangen von dem Lift l_g^\uparrow , dass er mit dieser Vektorraumstruktur verträglich ist, das heißt, dass er die Fasern *linear* aufeinander abbildet:

$$(99) \quad l_g^\uparrow (\alpha [p, v] + \beta [p, w]) := \alpha l_g^\uparrow [p, v] + \beta l_g^\uparrow [p, w].$$

Ist $P \times_K \mathbb{C}^n$ zusätzlich ein hermitesches Bündel, so kann man noch spezifizieren, ob die hochgehobene G -Wirkung l^\uparrow die hermitesche Struktur invariant lässt, d.h.

$$\langle l_g^\uparrow v, l_g^\uparrow w \rangle_{gx} = \langle v, w \rangle_x \quad \forall g \in G, \forall v, w \in \pi_{\mathbb{C}^n}^{-1}(x).$$

Haben wir also eine solche Hochhebung $l^\uparrow : G \rightarrow \text{Aut}(P \times_K \mathbb{C}^n)$ in das assoziierte Bündel vorgegeben, und lässt l^\uparrow zusätzlich die lineare und die hermitesche Struktur auf den Fasern invariant, so können wir durch

$$(100) \quad \boxed{(U(g) s)(x) := l_g^\uparrow s(g^{-1}x) \quad \forall g \in G}$$

eine Wirkung der Gruppe G auf dem Raum $\Gamma(P \times_K \mathbb{C}^n)$ der Schnitte des assoziierten Bündels definieren. Man überprüft zunächst, dass durch (100) tatsächlich ein Schnitt definiert wurde, dass das Bild von x unter $(U(g) s)$ also tatsächlich in der Faser über x liegt, d.h. $(U(g) s)(x) \in \mathbb{C}_x^n \equiv \pi_{\mathbb{C}^n}^{-1}(x)$. Es ist $s(g^{-1}x) \in \mathbb{C}_{g^{-1}x}^n$, da l^\uparrow aber die Wirkung von G auf dem Basisraum überdeckt (vgl. (97)) wird diese Faser unter l_g^\uparrow auf die Faser \mathbb{C}_x^n abgebildet. Es ist also $(U(g) s)(x) \in \mathbb{C}_x^n \forall x \in X$.

Die Darstellung $U(g)$ ist sogar unitär, falls das Maß auf dem Basisraum X invariant unter der Gruppenwirkung G ist.²

BEWEIS. Sei also $V \rightarrow X$ ein \mathbb{C}^n -Vektorbündel über X mit hermitescher Struktur $\langle \cdot | \cdot \rangle_x : \mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_x^n \rightarrow \mathbb{C}$, die unter der G -Wirkung invariant ist. Sei ferner μ ein G -invariantes Maß auf X .

Dann haben wir zum einen zu zeigen, dass $U(g) : \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V)$ ein linearer Operator ist, d.h.

$$(101) \quad (U(g)(\alpha a + \beta b))(x) = \alpha (U(g)a)(x) + \beta (U(g)b)(x) \quad \forall x \in X, \forall a, b \in \Gamma(V),$$

und zum anderen, dass $U(g)$ für alle $g \in G$ ein normerhaltender Operator ist, d.h.

$$(102) \quad \int_X \langle (U(g)a)(x) | (U(g)a)(x) \rangle_x d\mu(x) = \int_X \langle a(x) | a(x) \rangle_x d\mu(x) \quad \forall g \in G, \forall a \in \Gamma(V).$$

²Angenommen das Maß μ auf X ist nicht invariant, sondern nur quasiinvariant unter der Gruppenwirkung $G \curvearrowright X$, das bedeutet aus $\mu(B) = 0$ folgt auch $\mu \circ g^{-1}(B) = 0 \forall g \in G$ und alle messbaren Mengen $B \subset X$. Dann muss man, um eine unitäre Darstellung U auf $\Gamma(P \times_K \mathbb{C}^n)$ zu bekommen, Gleichung (100) auf der rechten Seite noch mit der Wurzel der Radon-Nykodym-Dichte $\left(\frac{d(\mu \circ g^{-1})}{d\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$ multiplizieren, um eine unitäre Darstellung zu erhalten; vgl. [Ish84, S. 1218 ff] und insbesondere Gleichung 5.2.17 der selben Referenz.

Dabei sei $a \in \Gamma(V)$ ein Repräsentant im Sinne von (73), das heißt a soll ein auf ganz X definierter, bis auf lokale U(1)-Eichtransformationen eindeutig bestimmter Schnitt sein.³

Zu (101) sei bemerkt, dass l_g^\uparrow nach Voraussetzung die Faser \mathbb{C}_x^n linear auf die Faser \mathbb{C}_{gx}^n abbildet (vgl. (99)), wir haben also:

$$\begin{aligned} (U(g)(\alpha a + \beta b))(x) &= l_g^\uparrow(\alpha a + \beta b)(g^{-1}x) \\ &= \alpha l_g^\uparrow a(g^{-1}x) + \beta l_g^\uparrow b(g^{-1}x) \\ &= \alpha (U(g)a)(x) + \beta (U(g)b)(x) . \end{aligned}$$

Für (102) folgt zunächst aus der G -Invarianz der hermiteschen Struktur:

$$\begin{aligned} \int_X \langle (U(g)a)(x) | (U(g)b)(x) \rangle_x d\mu(x) &= \int_X \langle l_g^\uparrow a(g^{-1}x) | l_g^\uparrow b(g^{-1}x) \rangle_x d\mu(x) \\ &= \int_X \langle a(g^{-1}x) | b(g^{-1}x) \rangle_{g^{-1}x} d\mu(x) \end{aligned}$$

und mit der Umbenennung $y := g^{-1}x$ und aus der G -Invarianz des Maßes μ folgt dann die Behauptung:

$$\begin{aligned} \int_X \langle (U(g)a)(x) | (U(g)b)(x) \rangle_x d\mu(x) &= \int_X \langle a(y) | b(y) \rangle_y d\mu(gy) \\ &= \int_X \langle a(y) | b(y) \rangle_y d\mu(y) \end{aligned}$$

□

Das in Abschnitt VII.4 definierte Maß μ auf $\mathbb{R}P^2$ ist nun invariant unter der Wirkung von SU(2). Das heißt, wenn wir einen Lift der Gruppenwirkung $SU(2) \curvearrowright \mathbb{R}P^2$ nach V_+ und V_- konstruiert haben, können wir durch (100) einen unitären Operator U_+ auf $\Gamma(V_+)$ bzw. U_- auf $\Gamma(V_-)$ konstruieren. Insbesondere ist U_\pm dann auch ein Operator auf dem Hilbertraum \mathcal{H}_\pm . Da U_\pm unitär ist, bildet er schließlich quadratintegrale Schnitte auf quadratintegrale Schnitte der selben Norm ab. \mathcal{H}_+ bzw. \mathcal{H}_- sind demnach abgeschlossen unter der durch U_+ bzw. U_- definierten Wirkung von SU(2).

2. Eine einfache Hochhebung der SU(2)-Wirkung

2.1. Vorbemerkungen. Wir gehen bei der Betrachtung der Drehungen auf den Bündeln V_+ und V_- von der Wirkung einer Einparameter-Untergruppe (EPU)⁴

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} : \mathbb{R} &\rightarrow SU(2) \\ \varphi &\mapsto \mathfrak{d}^\varphi := \exp\left[\frac{i}{2}\varphi(\hat{\varphi} \cdot \vec{\sigma})\right] \end{aligned}$$

der SU(2) aus, die die Drehungen um eine Achse $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^3$ beschreibt. Bezeichnen wir die SO(3)-Darstellung dieser Drehung mit $R^\varphi := R(\mathfrak{d}^\varphi)$, so induziert diese Wirkung nach Kapitel VIII auch

³Diese Voraussetzung ist notwendig, da wir auf der einen Seite nicht davon ausgehen können, dass V globale Schnitte zulässt, auf der anderen Seite aber sicherstellen müssen, dass $\rho_a(x) = \langle a(x) | a(x) \rangle_x$ global definiert ist.

⁴Kurz gesagt ist eine EPU einer Liegruppe G ein Gruppenhomomorphismus \mathfrak{d} von der kommutativen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ nach G . Fasst man G als Mannigfaltigkeit auf, so ist \mathfrak{d} eine Kurve auf G , für die zusätzlich

$$\mathfrak{d}^{\varphi+\vartheta} = \mathfrak{d}^\varphi \mathfrak{d}^\vartheta$$

gilt; siehe z.B. [KN63, S. 39].

eine Wirkung auf dem $\mathbb{R}P^2$:

$$\begin{aligned} l : \quad \text{SU}(2) \times \mathbb{R}P^2 &\rightarrow \mathbb{R}P^2 \\ (\mathfrak{d}^\varphi, [x]) &\mapsto l_{\mathfrak{d}^\varphi} [x] := [R^\varphi x] . \end{aligned}$$

Dabei ist $l : \text{SU}(2) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}P^2)$ nur dann ein Gruppenhomomorphismus, falls wir uns auf die Elemente der EPU \mathfrak{d} beschränken:

$$l_{\mathfrak{d}^\vartheta \mathfrak{d}^\varphi} [x] = l_{\mathfrak{d}^{\vartheta+\varphi}} [x] = l_{\mathfrak{d}^\varphi \mathfrak{d}^\vartheta} [x] = [R(\mathfrak{d}^{\vartheta+\varphi})x] = [R(\mathfrak{d}^\varphi \mathfrak{d}^\vartheta)x] = [R^\varphi R^\vartheta x] = l_{\mathfrak{d}^\vartheta} l_{\mathfrak{d}^\varphi} [x] .$$

2.2. SU(2)-Lift in das \mathbb{Z}_2 -Prinzipalbündel über $\mathbb{R}P^2$. Betrachten wir also zunächst den Lift der SU(2)-Wirkung in das nichttriviale \mathbb{Z}_2 -Prinzipalbündel über $\mathbb{R}P^2$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & S^2 \\ & & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Dabei wollen wir den $\mathbb{R}P^2$ als Orbitraum der \mathbb{Z}_2 -Wirkung auf S^2 verstehen:

$$\begin{aligned} \varsigma : \quad S^2 \times \mathbb{Z}_2 &\rightarrow S^2 \\ ((\theta, \phi), -1) &\mapsto (\pi - \theta, \phi + \pi) . \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklassen in $\mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$ lassen sich demnach schreiben als:

$$[\theta, \phi] = \{(\theta, \phi), (\pi - \theta, \phi + \pi)\} .$$

Eine kanonische SU(2)-Wirkung auf dem Totalraum $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die dreidimensionale Darstellung der SU(2), die auf \mathbb{R}^3 bekanntlich mit der Darstellung der SO(3) zusammenfällt. Zur Vereinfachung betrachten wir hier nun speziell die Drehungen um die 3-Achse:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_3 : \quad \mathbb{R} &\rightarrow \text{SU}(2) \\ \varphi &\mapsto \mathfrak{d}_3^\varphi := \exp\left(\frac{i}{2}\varphi\sigma_3\right) , \end{aligned}$$

können dann aber natürlich auch nur Aussagen über den Erzeuger einer Drehung um die 3-Achse, die 3-Komponente des Drehimpulses, machen. Die Wirkungen der EPU $\mathfrak{d}_3 : \mathbb{R} \rightarrow \text{SU}(2)$ auf dem Totalraum S^2 und dem Orbitraum $\mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$ sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} R : \quad \text{SU}(2) \times S^2 &\rightarrow S^2 & \text{und} & \quad l : \quad \text{SU}(2) \times \mathbb{R}P^2 &\rightarrow \mathbb{R}P^2 \\ (\mathfrak{d}_3^\varphi, (\theta, \phi)) &\mapsto (\theta, \phi + \varphi) & & \quad (\mathfrak{d}_3^\varphi, [\theta, \phi]) &\mapsto [\theta, \phi + \varphi] . \end{aligned}$$

Wir müssen nun noch überprüfen, ob die Wirkung $R_3^\varphi \equiv R(\mathfrak{d}_3^\varphi) : S^2 \rightarrow S^2$ tatsächlich ein Lift der Wirkung $l_{\mathfrak{d}_3^\varphi} : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ im Sinne der Definition IX.1 ist:

zu (i): Es ist offensichtlich

$$\pi \circ R_3^\varphi(\theta, \phi) = \pi \circ (\theta, \phi + \varphi) = [\theta, \phi + \varphi] = l_{\mathfrak{d}_3^\varphi} \circ [\theta, \phi] = l_{\mathfrak{d}_3^\varphi} \circ \pi(\theta, \phi) .$$

zu (ii): Aus der EPU-Eigenschaft von \mathfrak{d}_3 folgt:

$$R_3^\vartheta \circ R_3^\varphi(\theta, \phi) = R_3^{\vartheta+\varphi}(\theta, \phi) = (\theta, \phi + \varphi + \vartheta) = R_3^{\vartheta+\varphi}(\theta, \phi) = R(\mathfrak{d}_3^{\vartheta+\varphi})(\theta, \phi) = R(\mathfrak{d}_3^\vartheta \mathfrak{d}_3^\varphi)(\theta, \phi) .$$

zu (iii): Wir rechnen nur für das nichttriviale Element $(-1) \in \mathbb{Z}_2$ nach:

$$\begin{aligned} R_3^\varphi(\varsigma((\theta, \phi), -1)) &= R_3^\varphi(\pi - \theta, \phi + \pi) = (\pi - \theta, \phi + \pi + \varphi) \\ &= (\pi - \theta, \phi + \varphi + \pi) = \varsigma((\theta, \phi + \varphi), -1) = \varsigma(R_3^\varphi(\theta, \phi), -1) . \end{aligned}$$

Damit ist $R_3^\varphi = R \circ d_3^\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ ein Lift bezüglich der Wirkung der Einparameter-Untergruppe $d_3 : \mathbb{R} \rightarrow SU(2)$ auf $\mathbb{R}P^2$.

2.3. Ein einfacher Lift in das bosonische Vektorbündel V_+ . Wir betrachten nun das triviale \mathbb{C}^n -Vektorbündel V_+ über $\mathbb{R}P^2$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{C}^n \\ & & \downarrow \pi_+ \\ & & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Es sei daran erinnert, dass dies ein bezüglich der trivialen Wirkung τ der \mathbb{Z}_2 auf \mathbb{C}^n assoziiertes Vektorbündel zu $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ ist (vgl. Gleichung (87)).

Nun brauchen wir hier, bei einem ohnehin trivialen Vektorbündel, nicht den Umweg über das Prinzipalbündel zu gehen, sondern können direkt aus der Wirkung $l_{d^\varphi} : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ einen einfachen Lift in das assoziierte, triviale \mathbb{C}^n -Vektorbündel V_+ definieren. Lassen wir die $SU(2)$ auf \mathbb{C}^n trivial wirken, so erhalten wir mit

$$(103) \quad \begin{array}{ccc} l^\uparrow : SU(2) \times (\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{C}^n) & \rightarrow & \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{C}^n \\ (\mathfrak{d}^\varphi, (\mathbf{x}, v)) & \mapsto & l_{d^\varphi}^\uparrow(\mathbf{x}, v) := (l_{d^\varphi} \mathbf{x}, v) \end{array}$$

einen Lift der $SU(2)$ -Wirkung l_{d^φ} auf $\mathbb{R}P^2$. Offensichtlich überdeckt $l_{d^\varphi}^\uparrow : \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{C}^n$ die Wirkung auf dem Basisraum und erbt die Gruppenhomomorphismeigenschaft von l_{d^φ} (vgl. Gleichungen (97) und (98)). Desweiteren bildet $l_{d^\varphi}^\uparrow$ die Fasern linear aufeinander ab, schließlich haben wir den einfachen Lift $l_{d^\varphi}^\uparrow$ mit der trivialen Wirkung auf den Fasern gewählt, d.h. in der zweiten Komponente ist $l_{d^\varphi}^\uparrow$ einfach die Identität.

Der unitäre Operator dieser Wirkung ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} (U_+ (d^\varphi) a) (\mathbf{x}) &= l_{d^\varphi}^\uparrow a (l_{d^\varphi} \mathbf{x}) \\ &= l_{d^\varphi}^\uparrow (l_{d^\varphi} \mathbf{x}, \alpha (l_{d^\varphi} \mathbf{x})) \\ &= (l_{d^\varphi} l_{d^\varphi} \mathbf{x}, \alpha (l_{d^\varphi} \mathbf{x})) \\ &= (\mathbf{x}, \alpha (l_{d^\varphi} \mathbf{x})) . \end{aligned}$$

Für $n = 1$ entspricht das gerade der einfachen Wirkung einer Drehung d^φ auf die Funktion $\alpha : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{C}$:

$$(U (d^\varphi) \alpha) (\mathbf{x}) = \alpha (l_{d^\varphi} \mathbf{x}) .$$

2.4. Ein einfacher Lift in das fermionische Bündel. Kommen wir nun zu der einfachen Hochhebung der $SU(2)$ -Wirkung in das nicht-triviale, fermionische Vektorbündel V_- :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}P^2 \tilde{\times} \mathbb{C}^n \\ & & \downarrow \pi_- \\ & & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Die Elemente des Totalraums dieses Bündels sind nach (88) gegeben durch die Äquivalenzklassen:

$$[(\theta, \phi), v]_\zeta = \{((\theta, \phi), v), ((\pi - \theta, \phi + \pi), -v)\} .$$

Nun haben wir bereits in Abschnitt 2.2 einen Lift der Einparameter-Untergruppe $\mathfrak{d}_3 : \mathbb{R} \rightarrow \text{SU}(2)$ in das zu V_- assoziierte Prinzipalbündel gefunden und können jetzt den entsprechenden Lift in das assoziierte Vektorbündel V_- konstruieren.

Wir können die SU(2) hier für den einfachen Lift wieder trivial auf dem \mathbb{C}^n wirken lassen. Wir erhalten dann den einfachsten Lift der EPU $\mathfrak{d}_3 : \mathbb{R} \rightarrow \text{SU}(2)$ nach V_- als:

$$\begin{aligned} l^\uparrow : \text{SU}(2) \times (\mathbb{R}P^2 \tilde{\times} \mathbb{C}^n) &\rightarrow \mathbb{R}P^2 \tilde{\times} \mathbb{C}^n \\ (\mathfrak{d}_3^\varphi, [(\theta, \phi), v]_\zeta) &\mapsto [(\theta, \phi + \varphi), v]_\zeta . \end{aligned}$$

Man überprüft auch hier wieder, dass es sich um einen Lift in das assoziierte Bündel handelt. Wir haben:

$$\pi_- \circ l_{\mathfrak{d}_3^\varphi}^\uparrow [(\theta, \phi), v]_\zeta = \pi_- [(\theta, \phi + \varphi), v]_\zeta = [\theta, \phi + \varphi] = l_{\mathfrak{d}_3^\varphi} [(\theta, \phi)] = l_{\mathfrak{d}_3^\varphi} \circ \pi_- [(\theta, \phi), v]_\zeta .$$

und

$$l_{\mathfrak{d}_3^\vartheta}^\uparrow \circ l_{\mathfrak{d}_3^\varphi}^\uparrow [(\theta, \phi), v]_\zeta = l_{\mathfrak{d}_3^{\vartheta+\varphi}}^\uparrow [(\theta, \phi + \varphi), v]_\zeta = [(\theta, \phi + \varphi + \vartheta), v]_\zeta = l_{\mathfrak{d}_3^{\vartheta+\varphi}}^\uparrow [(\theta, \phi), v]_\zeta = l_{\mathfrak{d}_3^\vartheta}^\uparrow \circ l_{\mathfrak{d}_3^\varphi}^\uparrow [(\theta, \phi), v]_\zeta .$$

Schreiben wir die Äquivalenzklassen als Mengen aus, so ist $l_{\mathfrak{d}_3^\varphi}^\uparrow \in \text{Aut}(V_-)$ gegeben durch:

$$l_{\mathfrak{d}_3^\varphi}^\uparrow : \{((\theta, \phi), v), ((\pi - \theta, \phi + \pi), -v)\} \mapsto \{((\theta, \phi + \varphi), v), ((\pi - \theta, \phi + \varphi + \pi), -v)\} .$$

Wir können dann einen unitären Operator U_- , der die \mathfrak{d}_3 -Wirkung auf dem Raum der Schnitte $\Gamma(V_-)$ beschreibt, explizit angeben:

$$(104) \quad (U_- (\mathfrak{d}_3^\varphi) a) (\mathbf{x}) := l_{\mathfrak{d}_3^\varphi}^\uparrow a (l_{\mathfrak{d}_3^{-\varphi}} \mathbf{x}) .$$

Sei der Schnitt $a \in \Gamma(V_-)$ nun für $n = 1$ gegeben durch

$$a (\mathbf{x}) := [(\theta, \phi), \alpha (\theta, \phi)]_\zeta$$

mit $\alpha : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ einer antisymmetrischen Funktion. Dann ist

$$\begin{aligned} (U_- (\mathfrak{d}_3^\varphi) a) (\mathbf{x}) &= l_{\mathfrak{d}_3^\varphi}^\uparrow [(\theta, \phi - \varphi), \alpha (\theta, \phi - \varphi)]_\zeta \\ &= [(\theta, \phi), \alpha (\theta, \phi - \varphi)]_\zeta . \end{aligned}$$

Wir haben also wieder das Ergebnis für die Transformation von Funktionen reproduziert.

2.5. Die irreduziblen Darstellungen der SU(2). Wie wir aus den letzten Abschnitten lernen, sollte ein nicht-einfacher Lift in das fermionische bzw. in das bosonische Bündel eine SU(2)-Wirkung auf den Fasern \mathbb{C}^n des jeweiligen Bündels beinhalten. Das führt uns also direkt auf die irreduziblen Darstellungen der SU(2). Zu fester Gesamtdrehimpulsquantenzahl $j = \max(m_j)$ gibt es $2j + 1$ orthogonale Eigenvektoren $\{|j, m_j\rangle\}_{m_j \in \{-j, \dots, j\}}$. Die irreduziblen Darstellungen der SU(2) sind folglich Darstellungen auf einem $(2j + 1)$ -dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum. Die m_j sind dabei die Eigenwerte der Komponente j_3 des Gesamtdrehimpulsoperators des Zweiteilchensystems. Um also eine irreduzible Wirkung der SU(2) auf den Fasern, und damit nicht-einfache Lifts der SU(2) zuzulassen, müssen die Fasern der Vektorbündel V_+ bzw. V_- die Dimension $2j + 1$ haben.

Insgesamt haben wir also die beiden Bündel

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^{2j+1} \longrightarrow \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{C}^{2j+1} & & \mathbb{C}^{2j+1} \longrightarrow \mathbb{R}P^2 \tilde{\times} \mathbb{C}^{2j+1} \\
 \downarrow \pi_+ & \text{und} & \downarrow \pi_- \\
 \mathbb{R}P^2 & & \mathbb{R}P^2
 \end{array}$$

als Startpunkt, um die Drehimpulsoperatoren für bosonische bzw. fermionische Systeme zu untersuchen.

Assoziiertes Bündel und äquivariante Funktionen

Dieser Anhang ist dazu gedacht, den Zusammenhang zwischen Schnitten in einem assoziierten Bündel $P \times_K F$ und den bezüglich der Wirkung der Strukturgruppe K äquivarianten Funktionen $P \rightarrow F$ über dem Prinzipalbündel P herzuleiten. Wir betrachten dazu zunächst noch einmal die Konstruktion eines assoziierten Bündels aus einem Prinzipalbündel.

Kurz gesprochen ist ein Prinzipalbündel ein Rechts- K -Raum mit äquivarianter Trivialisierung. Etwas ausführlicher bedeutet das (cf. [Ish84, S. 1208]):

DEFINITION D.1 (Prinzipalbündel). Ein Prinzipalbündel ist ein Faserbündel $P \xrightarrow{\pi} X$, dessen typische Faser eine Liegruppe K ist, die auf dem Totalraum P von rechts wirkt und zusätzlich die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) Die Rechtswirkung von K

$$\begin{aligned} P \times K &\rightarrow P \\ (p, k) &\mapsto pk \end{aligned}$$

auf dem Totalraum P ist frei.^a

(ii) Die lokalen Trivialisierungen von P

$$\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times K$$

sind K -äquivariant, d.h.^b

$$\phi(pk) = \phi(p)k \quad \forall k \in G.$$

^a„frei“ bedeutet, dass es keinen Punkt $p \in P$ gibt, der unter der Wirkung von G invariant ist.

^bDie Wirkung von K auf $U \times K$ wird dabei natürlich durch die Rechtswirkung der Gruppe K auf sich selbst definiert:

$$\begin{aligned} (U \times K) \times K &\rightarrow U \times K \\ ((x, h), k) &\mapsto (x, hk) \end{aligned}$$

Dass die Wirkung von K auf P frei ist, hat zur Folge, dass der Orbitraum P/K wieder eine Mannigfaltigkeit, nämlich der Basisraum X ist (Quotientenraumtheorem, für Details siehe z.B. [Lee03, Thm. 9.16]). Die Orbits von K auf P sind dann die Fasern des Prinzipalbündels und die Wirkung von K auf diesen Fasern, die demnach im Wesentlichen Kopien von K sind, ist frei und *transitiv*.

Sei also

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

ein Prinzipalbündel. Zur Konstruktion eines assoziierten Bündels brauchen wir nun zusätzlich eine Linkswirkung von K auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit F :

$$K \times F \rightarrow F.$$

Dann können wir ein assoziiertes Bündel zu $P \xrightarrow{\pi} X$ mit typischer Faser F bilden. Wir definieren dazu eine Rechtswirkung von K auf $P \times F$ durch

$$\begin{aligned} (P \times F) \times K &\rightarrow P \times F \\ ((p, f), k) &\mapsto (pk, k^{-1}f). \end{aligned}$$

Da die Wirkung von K auf P frei ist, ist die hier definierte Wirkung von K auf $P \times F$ insbesondere auch frei, und der Quotientenraum

$$P \times_K F := (P \times F)/K$$

ist wieder eine Mannigfaltigkeit. Diese Mannigfaltigkeit ist dann der Totalraum des assoziierten Bündels von P mit typischer Faser F :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & P \times_K F \\ & & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

der natürlich aus Äquivalenzklassen

$$[p, f] = \{(p', f') \in P \times F : (p', f') = (pk, k^{-1}f), k \in K\}$$

besteht.

Für die Schnitte solcher assoziierter Bündel haben wir die wichtige

FESTSTELLUNG D.2 (Schnitte und äquivariante Funktionen). *Die Schnitte des assoziierten Bündels $(P \times_K F) \rightarrow X$ stehen in bijektiver Korrespondenz zu den äquivalenten Funktionen $\psi : P \rightarrow F$, d.h.^a*

$$\Gamma(P \times_K F) \approx \{\psi \in C^\infty(P, F) : \psi(pk) = k^{-1}(\psi(p)) \quad \forall k \in K\}.$$

^avgl. [Ish84, Gleichung (5.1.34)]

Auf der linken Seite der definierenden Gleichung in obiger Feststellung wirkt $k \in K$ von rechts auf ein Element $p \in P$, auf der rechten Seite wirkt $k^{-1} \in K$ von links auf ein Element $\psi(p) \in F$. Natürlich hängt diese Definition der äquivalenten Funktionen direkt mit der oben definierten Rechtswirkung der Gruppe K auf $P \times F$ zusammen, wie man am Beweis der Feststellung explizit sieht.

BEWEIS. Sei $\psi \in C^\infty(P, F)$ eine äquivariante Funktion, d.h.

$$\psi(pk) = k^{-1}\psi(p) \quad \forall k \in K,$$

dann können wir einen Schnitt $\sigma_\psi : X \rightarrow P \times_K F$ definieren:

$$\sigma_\psi(x) := [p_x, \psi(p_x)] \quad \text{mit } p_x \in \pi^{-1}(x),$$

der wegen

$$[p_x k, \psi(p_x k)] = [p_x k, k^{-1}\psi(p_x)] = [p_x, \psi(p_x)]$$

nicht von der Wahl des Repräsentanten $p_x \in \pi^{-1}(x) \equiv K_x$ abhängt. Man kann schließlich wegen der transitiven Wirkung der Gruppe K auf den Fasern K_x jedes beliebige Element in $q_x \in K_x$ in der Form $q_x = p_x k$ für ein $k \in K$ schreiben.

Sei nun umgekehrt $\sigma : X \rightarrow P \times_K F$ ein Schnitt des assoziierten Bündels, dann lässt sich in eindeutiger Weise durch die Gleichung

$$\sigma(\pi(p)) = [p, \psi_\sigma(p)] \quad \forall p \in P$$

eine Funktion $\psi_\sigma \in C^\infty(P, F)$ definieren, die dann wegen

$$[p, \psi_\sigma(p)] = \sigma(\pi(p)) = \sigma(\pi(pk)) = [pk, \psi(pk)] = [pkk^{-1}, k\psi_\sigma(pk)] = [p, k\psi_\sigma(pk)]$$

auch K -äquivariant ist:

$$\psi_\sigma(p) = k\psi_\sigma(pk) \quad \Leftrightarrow \quad \psi_\sigma(pk) = k^{-1}\psi_\sigma(p).$$

Inbesondere sehen wir, dass

$$\sigma_{(\psi_\sigma)}(x) = [p_x, \psi_\sigma(p_x)] = \sigma(\pi(p_x)) = \sigma(x) \quad \forall x \in X$$

und dass ferner wegen

$$[p, \psi_{(\sigma_\psi)}(p)] = \sigma_\psi(\pi(p)) = [p, \psi(p)] \quad \forall p \in P$$

auch $\psi_{(\sigma_\psi)}(p) = \psi(p)$ gilt. Demnach sind die oben definierten Zuordnungen

$$\psi \mapsto \sigma_\psi \quad \text{und} \quad \sigma \mapsto \psi_\sigma$$

invers zueinander, und wir haben tatsächlich die behauptete bijektive Korrespondenz. \square

L_- als komplex-tautologisches Bündel über $\mathbb{R}P^2$

Wir gehen bei unseren Betrachtungen in diesem Anhang von Gleichung (86) aus:

$$\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Wir stellen dabei eine etwas andere Sichtweise als die in Abschnitt VII.5 betrachtete vor. Es wird, für den Spezialfall von Vektorbündeln mit Faserdimension Eins, jeweils ein \mathbb{C} -Geradenbündel für jede Äquivalenzklasse in $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2)$ konstruiert. Wir orientieren uns dabei an den Ausführungen von Andrés Reyes in [Rey06].¹ Nach einer kurzen Bemerkung über das neutrale Element in $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2)$ im ersten Abschnitt konstruieren wir im zweiten Abschnitt dann einen Repräsentanten aus dem nichttrivialen Element in $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2)$. Es wird uns dabei die Analogie zum tautologischen Bündel über $\mathbb{R}P^2$ behilflich sein.

1. Das neutrale Element in $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2)$

$\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2)$ ist eine Gruppe und hat somit auch ein neutrales Element. Bei Äquivalenzklassen von Faserbündeln entspricht dies dem trivialen Bündel:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{C} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Wir bezeichnen dieses Bündel kurz mit $L_+ \xrightarrow{\pi_+} \mathbb{R}P^2$. Man beachte, dass die Übergangsabbildungen $t_{lm}^+ : K_l \cap K_m \rightarrow 1 \subset \mathbb{Z}_2 \subset U(1)$ dieses Bündels alle trivial sind. Als Strukturgruppe dieses Bündels ist demnach jede Gruppe erlaubt, die eine Wirkung auf der typischen Faser \mathbb{C} hat. Wie wir bereits in Kapitel VII gesehen haben, entsprechen die Schnitte dieses Bündels in kanonischer Weise den symmetrischen Funktionen $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Nehmen wir nämlich einen beliebigen Schnitt $\sigma \in \Gamma(L_+)$, also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}P^2 &\rightarrow L_+ \\ \mathbf{p} &\mapsto \sigma(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

so gibt es zu diesem Schnitt eine Funktion $s : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{C}$, sodass

$$\sigma(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, s(\mathbf{p})) \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}P^2.$$

Nun entsprechen jedem Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$ zwei Antipodenpunkte $\{p, -p\}$ der Sphäre. Eine Funktion $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$, die $s : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{C}$ repräsentiert, muss also in jedem Fall

$$\psi(p) = s(\mathbf{p}) = \psi(-p) \quad \text{mit } \mathbf{p} = [p] = \{p, -p\}$$

¹A. Reyes erhält die Existenz von zwei nicht isomorphen Geradenbündeln über dem $\mathbb{R}P^2$, anders als wir, aus der Theorie der projektiven Moduln (vgl. Kapitel 3 und 4 seiner Arbeit).

erfüllen. Die Funktion ψ ist also symmetrisch.

2. Das komplex-tautologische Bündel

Neben dem trivialen gibt es nun noch ein zweites, natürliches Geradenbündel über der projektiven Ebene: das tautologische Bündel. Das ist ein Bündel mit Basisraum $\mathbb{R}P^2$, bei dem die Faser über einem Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}P^2$ die entsprechende Ursprungsgerade $\{\alpha p : p \in \mathbf{p}, \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ ist. Der Totalraum dieses Bündels ist demnach die Menge

$$(105) \quad \begin{aligned} E(L_-^{\mathbb{R}}) &= \{(\mathbf{p}, w) \in \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}^3 : w \in \mathbf{p}\} \\ &= \{(\mathbf{p}, w) \in \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}^3 : w = \alpha p, [p] = \mathbf{p}, \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Wir haben dann die Projektion:

$$\pi : (\mathbf{p}, w) \mapsto \mathbf{p}.$$

Um nun eine lokale Trivialisierung dieses Bündels zu konstruieren, brauchen wir eine umkehrbare Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \mathbb{R} \\ (\mathbf{p}, w) &\mapsto (\mathbf{p}, \varphi(w)) \end{aligned}$$

wobei $U \subset \mathbb{R}P^2$ eine offene Umgebung und (\mathbf{p}, w) ein allgemeines Element in $\pi^{-1}(U) \subset E(L_-^{\mathbb{R}})$ bezeichnet. In der ersten Komponente von ϕ haben wir die Identität. Damit aus ϕ eine umkehrbare Abbildung wird, muss auch die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto \varphi(w) \end{aligned}$$

der zweiten Komponente eindeutig sein. Wir verwenden zur Konstruktion dieser Abbildung, die bereits in Abschnitt VII.3 gewählten lokalen Kartengebiete $\{K_1, K_2, K_3\}$ des $\mathbb{R}P^2$. Es sei an dieser Stelle nochmal daran erinnert, dass diese Kartengebiete Zentralprojektionen der Mengen $X_l = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_l \neq 0\}$ sind:

$$K_l = \mathcal{P}(X_l) \subset \mathbb{R}P^2$$

(vgl. Formel (79)). Sei also $\mathbf{p} \in K_l$, sei ferner $p \in \mathbb{R}^3$ ein normierter Repräsentant des Strahls \mathbf{p} , den wir in diesem Fall als Teilmenge $\mathbf{p} = \{p, -p\} \subset S^2$ auffassen können. Wegen $\mathbf{p} \in K_l$ ist dann also $p \in X_l$ und somit die entsprechende Komponente $p_l \neq 0$. Zum anderen gibt es zu dem Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ wegen $w \in \mathbf{p}$ einen Skalar $\beta \in \mathbb{R}$, sodass $w = \beta p$. Da es keinen ausgezeichneten Repräsentanten in \mathbf{p} gibt, müssen wir $w = -\beta(-p)$ als mögliche Kombination für w auch zulassen und können deshalb nicht einfach den Skalar $\beta \in \mathbb{R}$ als Bild $\varphi(w)$ nehmen (man könnte dann ebensogut $-\beta$ nehmen). Der Wert $\varphi(w) \in \mathbb{R}$, den wir w zuordnen, muss eindeutig sein, insbesondere muss also $\varphi(w)$ den selben Wert liefern, wenn man statt $p \in \{p, -p\}$ den gespiegelten Vektor $-p \in \{p, -p\}$ als normierten Repräsentanten von $\mathbf{p} \in \mathbb{R}P^2$ wählt. Zusammenfassend muss also

$$\{\beta p, -\beta(-p)\} \mapsto \varphi(w).$$

Wir erreichen dies durch die Definition

$$\varphi(w) := \beta \frac{p_l}{|p_l|} = \beta \operatorname{sgn}(p_l).$$

Wir nehmen also die in der Karte K_l ausgezeichnete l -Achse $e_l \cdot \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ als Referenz und tragen die Länge β der Vektoren auf dieser Achse auf. Die Richtung, in die β aufgetragen wird (positiv

oder negativ) hängt dabei nicht von dem gewählten Repräsentanten $\pm p \in \mathbf{p}$ ab, denn wir haben

$$\beta p = w = -\beta(-p) \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \varphi(\beta p) &= \varphi(w) = \varphi(-\beta(-p)) \\ \beta \operatorname{sgn}(p_l) &= -\beta \operatorname{sgn}(-p_l) . \end{aligned}$$

Die lokalen Trivialisierungen des tautologischen Bündels ergeben sich daraus zu:

$$(106) \quad \begin{aligned} \phi_l : \quad \pi^{-1}(K_l) &\rightarrow K_l \times \mathbb{R} \\ (\mathbf{p}, w) = (\mathbf{p}, \beta p) &\mapsto (\mathbf{p}, \phi(w)) = (\mathbf{p}, \operatorname{sgn}(p_l) \beta) . \end{aligned}$$

Nun hat das tautologische Bündel über $\mathbb{R}P^2$ als typische Faser den Vektorraum der reellen Zahlen \mathbb{R} . Um daraus ein komplexes Geradenbündel zu machen, müssen wir die obige Konstruktion des Totalraums und der lokalen Trivialisierungen ins Komplexe erweitern. Dabei werden wir sehen, dass das aus dieser Verallgemeinerung gewonnene *komplex-tautologische* Geradenbündel über $\mathbb{R}P^2$ ein Repräsentant der zweiten, nichttrivialen Äquivalenzklasse in $\operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2)$ ist. Sei zur konkreten Konstruktion

$$\begin{aligned} |\cdot\rangle : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ p = p^i e_i &\mapsto |p\rangle := p^i |e_i\rangle , \end{aligned}$$

die natürliche Inklusion des \mathbb{R}^3 in \mathbb{C}^3 , wobei $\{e_i\}$ die kanonische Basis von \mathbb{R}^3 und $\{|e_i\rangle\}$ die des \mathbb{C}^3 bezeichnet. Wir definieren dann als Totalraum des zu konstruierenden \mathbb{C} -Geradenbündels:

$$(107) \quad E(L_-) = \{(\mathbf{p}, |w\rangle) \in \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{C}^3 : |w\rangle = \lambda |p\rangle, [p] = \mathbf{p}, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

(vgl. Gleichung (105)) mit der Projektion

$$\pi_- : (\mathbf{p}, |w\rangle) \mapsto \mathbf{p} .$$

Wegen der beiden Elemente in der Äquivalenzklasse $\mathbf{p} = [p] = \{p, -p\}$ gibt es nun wieder die beiden Schreibweisen $|w\rangle = \lambda |p\rangle = -\lambda |-p\rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$ für den Vektor $|w\rangle \in \mathbb{C}^3$, wonach

$$(\mathbf{p}, |w\rangle) = (\mathbf{p}, \lambda |p\rangle) = (\mathbf{p}, (-\lambda) |-p\rangle) ,$$

zwei offensichtlich äquivalente Darstellungen für das selbe Element $(\mathbf{p}, |w\rangle) \in E(L_-)$ sind. Ein Element in $E(L_-)$ lässt sich demnach auch als Äquivalenzklasse schreiben:

$$(108) \quad [\mathbf{p}, |w\rangle] = \{(\mathbf{p}, \lambda |p\rangle), (\mathbf{p}, -\lambda |-p\rangle)\} .$$

Vergleicht man diese Äquivalenzklasse mit der in Abschnitt VII.5 gefundenen Äquivalenzklasse (88) des nichttrivialen Vektorbündels V_- für die Faserdimension $n = 1$, so sieht man ein, dass beide Klassen Elemente des selben Bündels beschreiben. Ein Wechsel des Repräsentanten $p \rightarrow -p$ in (88) bzw. (108) ändert auch das Vorzeichen des Vektors $v \in \mathbb{C}^1$ in (88) bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$ in (108).

Analog zum reellen Fall konstruieren wir nun die lokalen Trivialisierungen des komplex-tautologischen Bündels. Diese sollen natürlich nicht von der Wahl des Repräsentanten $p \in \mathbf{p}$ abhängen. Wir definieren analog zu (106):

$$(109) \quad \begin{aligned} \phi_l : \quad \pi^{-1}(K_l) &\rightarrow K_l \times \mathbb{C} \\ (\mathbf{p}, \lambda |p\rangle) &\mapsto (\mathbf{p}, \operatorname{sgn}(p_l) \lambda) \quad l \in \{1, 2, 3\} , \end{aligned}$$

mit $p \in \mathbf{p}$, $\|p\| = 1$, $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$. Genauso wie oben rechnet man nach, dass diese Trivialisierungen wohldefiniert sind:

$$\phi_l([-p], (-\lambda) |-p\rangle) = ([-p], \operatorname{sgn}(-p_l) (-\lambda)) = ([p], \operatorname{sgn}(p_l) \lambda) = \phi_l([p], \lambda |p\rangle) .$$

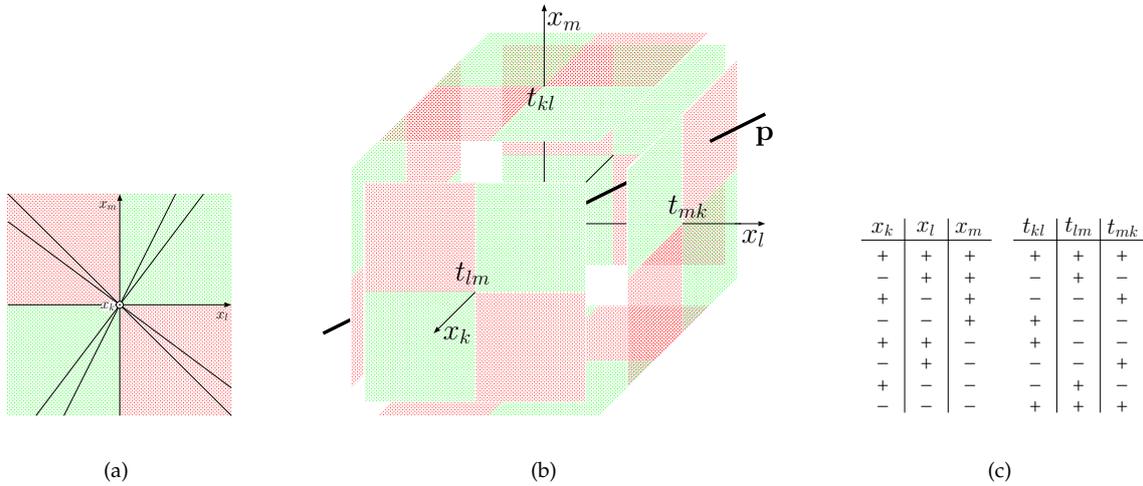


ABBILDUNG 1. Bild (a) zeigt die (x_l, x_m) -Ebene. Für Strahlen $\mathbf{p} \in K_l \cap K_m$, deren *senkrechte* Projektion auf diese Ebene sich in dem grünen Bereich befindet, ist $t_{lm}(\mathbf{p}) = +1$; für Strahlen $\mathbf{q} \in K_l \cap K_m$, deren Projektion sich in dem roten Bereich befindet ist $t_{lm}(\mathbf{q}) = -1$. Strahlen \mathbf{r} , die auf eine der Achsen projiziert werden, liegen nicht in $K_l \cap K_m$. Anhand von Bild (b) überlegt man sich leicht, welche Strahlen für die jeweilige Übergangsabbildung welches Vorzeichen produzieren. Ferner sieht man, dass dieses Vorzeichen wohldefiniert, d.h. für jeden Strahl \mathbf{p} eindeutig festgelegt ist. Für den gezeichneten Strahl ist beispielsweise $t_{kl}(\mathbf{p}) = t_{mk}(\mathbf{p}) = -1$ und $t_{lm}(\mathbf{p}) = +1$, für die Koordinatenachsen, die natürlich auch Strahlen darstellen, lässt sich kein Vorzeichen festlegen, da sie jeweils nur in einem Kartengebiet und damit nicht im Definitionsbereich der Übergangsabbildungen liegen. Man erhält aus Abb. (b) eine Tabelle der Form (c), anhand derer man die Relationen (Kozykelbedingung, etc.) zwischen den Übergangsabbildungen überprüfen kann.

Mit den lokalen Trivialisierungen (107) haben wir natürlich auch die Übergangsabbildungen $t_{lm}^- : K_l \cap K_m \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Aus der bekannten Gleichung

$$\phi_l \circ \phi_m^{-1}(\mathbf{p}, \alpha) = (\mathbf{p}, t_{lm}^-(\mathbf{p})\alpha) \quad \forall \mathbf{p} \in K_l \cap K_m$$

folgt nämlich $\forall [p] = \mathbf{p} \in K_l \cap K_m$:

$$([p], \alpha) \xrightarrow{\phi_m^{-1}} ([p], \text{sgn}(p_m)\alpha | p) \xrightarrow{\phi_l} ([p], \text{sgn}(p_l) \text{sgn}(p_m)\alpha) = ([p], \text{sgn}(p_l p_m)\alpha)$$

und wir lesen ab:

$$t_{lm}^-([p]) = \text{sgn}(p_l p_m).$$

Die Wohldefiniertheit und die Kozykelbedingungen dieser Übergangsabbildungen liest man direkt aus der Abbildung 1 ab, oder rechnet die Eigenschaften einfach nach. Wegen $t_{lm}^-(\mathbf{p}) \in \{+1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$ haben wir den speziellen Fall, dass die Übergangsabbildungen selbstinvers sind:

$$t_{lm}^-(\mathbf{p}) = t_{ml}^-(\mathbf{p}) = (t_{lm}^-)^{-1}(\mathbf{p}).$$

Ferner rechnet man leicht nach, dass sie die Kozykelbedingungen erfüllen:

$$t_{kl}^-(\mathbf{p}) t_{lm}^-(\mathbf{p}) = t_{km}^-(\mathbf{p}).$$

Wir haben demnach ein zweites \mathbb{C} -Geradenbündel

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & L_- \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

über $\mathbb{R}P^2$ konstruiert, dessen Übergangsabbildungen

$$\begin{aligned} t_{lm}^- : K_l \cap K_m &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ [p] &\mapsto t_{lm}^-([p]) = \text{sgn}(p_l p_m) \end{aligned}$$

offensichtlich nicht trivial sind (vgl. auch Abb. 1).

Auch hier können wir sehen, dass die lokalen Schnitte² $\sigma \in \Gamma(L_-)$ dieses Bündels den antisymmetrischen Funktionen $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ entsprechen. Sei nämlich

$$\begin{aligned} \sigma_l : K_l &\rightarrow L_- \\ [p] &\mapsto \sigma_l([p]) = ([p], \alpha |p\rangle) \end{aligned}$$

ein Schnitt in $\Gamma(L_-)$, dann gibt es eine Funktion $\psi_l : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$, sodass

$$\sigma_l([p]) = ([p], \psi_l(p) |p\rangle) .$$

Nun darf der Wert des Schnittes $\sigma_l \in \Gamma(L_-)$ nicht von der Wahl des Repräsentanten $p \in [p] = \{p, -p\}$ abhängen. Für die Funktion $\psi_l : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ muss demnach gelten:

$$([p], \psi_l(p) |p\rangle) = \sigma_l([p]) = \sigma_l([-p]) = ([-p], \psi_l(-p) |-p\rangle) = ([p], -\psi_l(-p) |p\rangle) ,$$

also

$$\psi_l(-p) = -\psi_l(p) ,$$

das heißt $\psi_l : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine antisymmetrische Funktion. Insbesondere folgt daraus auch, dass jede stetige Funktion $\psi_l : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle hat, d.h. jeder Schnitt $\sigma_l : \mathbb{R}P^2 \rightarrow L_-$ hat mindestens eine Nullstelle und das Bündel L_- ist folglich nicht isomorph zu dem trivialen Bündel L_+ .³ L_- ist also tatsächlich ein Repräsentant der zweiten Äquivalenzklasse in $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2)$.

Für die Faserdimension Eins, also für die Geradenbündel L_+ und L_- über $\mathbb{R}P^2$, lassen sich auf diese Weise also die Ergebnisse aus Abschnitt VII.5 reproduzieren.

²Das Bündel $L_- \xrightarrow{\pi^-} \mathbb{R}P^2$ lässt natürlich nur lokale Schnitte $\sigma_l : K_l \rightarrow L_-$ zu, da die Existenz eines globalen Schnitts $\sigma : \mathbb{R}P^2 \rightarrow L$ der Trivialität des Bündels L gleichkommt.

³Äquivalent zu der Aussage, dass ein Bündel trivial ist, ist bekanntlich die Aussage, dass es einen (stetigen) Schnitt ohne Nullstelle zulässt.

Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit an zwei Beispielen gesehen, wie die projektive Geometrie - angewandt in zwei unterschiedlichen Teilgebieten der Quantenmechanik - zu fundamentalen Ergebnissen führt.

Im ersten Teil habe ich gezeigt, wie der Hauptsatz der projektiven Geometrie, erweitert auf die quasiunitären Kollineationen im projektiven Hilbertraum, auf das fundamentale Wigner-Theorem zur Realisierung von Symmetrien auf dem Hilbertraum führt. Wir haben bereits in Kapitel VI darauf hingewiesen, dass es interessant wäre zu untersuchen, ob der Hauptsatz der projektiven Geometrie auch für solche Kollineationen, die nicht aus der Invarianz der projektiven Hilbertraumstruktur $\odot : \mathcal{PH} \times \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R}_+$ folgen, seine Gültigkeit behält.

Ein weiteres im ersten Teil behandeltes Thema ist das Auftauchen projektiver Phasen bei der Realisierung von Symmetrien auf dem Hilbertraum. Es ist uns gelungen eine hinreichende Bedingung für das Verschwinden dieser projektiven Phasen herzuleiten. Diese Bedingung war die Trivialität der zweiten Gruppenkohomologie der entsprechenden Symmetriegruppe. Wir konnten desweiteren die begründete Vermutung äußern, dass das Verschwinden der projektiven Phasen als Bedingung an die - geometrisch sehr anschaulichen - Fundamentalgruppen $\pi_0(G)$ und $\pi_1(G)$ der darzustellenden Liegruppe G formuliert werden kann.

Im zweiten Teil habe ich dargelegt, auf welche Weise die projektive Geometrie bei der geometrischen Beschreibung eines Systems von zwei identischen Teilchen auftaucht. Ich habe eine einfache, geometrische Herleitung der Fermi-Bose-Alternative, sowie die daraus resultierenden Hilberträume \mathcal{H}_+ und \mathcal{H}_- angegeben. Desweiteren wurde gezeigt, wie sich die Drehungen in dem Konfigurationsraum von zwei identischen Teilchen, der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$, beschreiben lassen. Im letzten Kapitel habe ich eine Möglichkeit für die Konstruktion einer Hochhebung der $SU(2)$ -Wirkung in die Vektorbündel über $\mathbb{R}P^2$ beschrieben. Wir haben gesehen, dass daraus direkt eine unitäre Darstellung der Drehungen auf dem entsprechenden Hilbertraum erwächst. Ich habe diese Operatoren für zwei einfache Lifts der $SU(2)$ -Wirkung explizit angegeben. Daraus konnte man erkennen, dass es für einen allgemeinen, nicht-einfachen Lift notwendig ist, die $SU(2)$ auf den Fasern wirken zu lassen. Damit sind die Grundlagen für eine geometrische Formulierung der Kuckert-Gleichung gelegt.

Der nächste Schritt zu einem geometrischen Verständnis der Kuckert-Gleichung wäre die Konstruktion von solchen nicht-einfachen Lifts der $SU(2)$ -Wirkung, das heißt Lifts nach V_+ bzw. V_- , die eine nichttriviale Wirkung auf den Fasern haben. Daraus erhält man direkt eine unitäre Wirkung der $SU(2)$ auf den Hilberträumen \mathcal{H}_+ und \mathcal{H}_- . Betrachten wir speziell die Einparameter-Untergruppe

$$d_3 : \varphi \mapsto d_3^\varphi = \exp\left(\frac{i}{2}\varphi\sigma_3\right)$$

der $SU(2)$, so erhalten wir als infinitesimalen Erzeuger der entsprechenden Wirkung auf dem Hilbertraum gerade die z -Komponente des Gesamtdrehimpulsoperators, für den wir dann die Kuckert-Aussage überprüfen wollen. Wir können dabei im Allgemeinen nicht erwarten, dass sich der Gesamtdrehimpuls des Zweiteilchensystems als Summe der Gesamtdrehimpulse der entsprechenden Einteilchensysteme darstellen lässt. Es wird also unter Umständen nicht ohne weiteres möglich sein, eine Aussage über den Drehimpuls (oder Spin) des einzelnen Teilchens aus der Kenntnis des Drehimpulses des Zweiteilchensystems abzuleiten, und man könnte in der Kuckert-Gleichung einen Weg vermuten, der diesen Rückschluss möglich macht.

Notation

Lateinisches Alphabet.

a, b, \dots	meist Elemente eines Vektorraums, Schnitte, speziell in Teil I: Repräsentanten physikalischer Zustände, bzw. Elemente eines \mathbb{C} -Hilbertraums
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Elemente eines projektiven Raums, auch als <i>Strahlen</i> bezeichnet
a, \mathbf{b}, \dots	Elemente aus $S^\infty/U(1) \equiv \mathcal{PH}$, die sich nur dadurch von den Strahlen unterscheiden, dass für sie nur normierte Repräsentanten zugelassen sind. Sie werden als <i>Einheitskreise</i> bezeichnet.
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Elemente aus $\mathcal{H}/U(1)$, dem Orbitraum der $U(1)$ auf \mathcal{H} . Sie werden als <i>Kreise</i> oder <i>Bargmann-Strahlen</i> bezeichnet.
$ \mathbf{a} $	<i>Radius</i> des Kreises \mathbf{a}
$\ a\ $	Norm des Vektors a
a^\perp	orthogonales Komplement zu dem von a aufgespannten, eindimensionalen Unterraum.
$[a]$	Äquivalenzklasse, Orbit
$\text{Aut}(X)$	Automorphismengruppe des Raumes X
$\text{Aut}_Q(V)$	Menge der Eichtransformationen in dem Bündel $V \xrightarrow{\pi} Q$, d.h. Automorphismen eines Bündels V über Q , die jede Faser auf sich selbst abbilden.
$\text{GL}(n, \mathbb{K})$	Generelle lineare Gruppe in n Dimensionen über dem Körper \mathbb{K} .
\mathcal{H}	Hilbertraum
$H^n(G, M)$	n -te Kohomologiegruppe der Gruppe G mit Koeffizienten in dem G -Modul M .
\mathbb{K}	Körper - entweder der Körper der reellen, \mathbb{R} , oder der komplexen Zahlen, \mathbb{C}
\mathbb{K}^\times	Einheitengruppe zu \mathbb{K} , im Falle eines Körpers sind das alle Elemente ohne die Null.
\mathbf{K}	Kollineation zwischen projektiven Räumen
$L^p(Q)$	Quotientenraum aus dem Raum der p -integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}^p(Q)$ und dem Kern N der p -Norm auf dem Funktionenraum über Q .
$L^p(\Gamma(V), \mu)$	Quotientenraum aus dem Raum der bezüglich des Maßes μ auf dem Basisraum p -integrierbaren Schnitte des Bündels V und der Menge der Schnitte mit verschwindender p -Norm.
\mathcal{PH}	projektiver Hilbertraum
$\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$	Projektiver Raum der Dimension n zu dem Vektorraum \mathbb{K}^{n+1}
$\mathcal{P}V$	projektiver Raum zum Vektorraum V
$\mathbb{R}P^n$	reeler projektiver Raum der Dimension n , $\mathbb{R}P^2 \equiv \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$
S^n	Einheitssphäre der reellen Dimension n
\mathbb{S}_n	symmetrische Gruppe der Permutationen von n Elementen

$SG(X)$	Strukturgruppe der Menge X , Menge aller Transformationen, die eine gegebene Struktur auf X invariant lassen.
$SO(n)$	spezielle orthogonale Gruppe in n Dimensionen
$SU(n)$	spezielle unitäre Gruppe in n (komplexen) Dimensionen
$su(n)$	Liealgebra zu $SU(n)$.
\mathbf{T}	Darstellung einer Symmetrietransformation auf \mathcal{PH}
\mathbf{T}	Darstellung einer Symmetrietransformation auf $S^\infty/U(1) \equiv \mathcal{PH}$
\mathfrak{T}	Verallgemeinerte Symmetrietransformation zwischen Kreisen
$U(n)$	unitäre Gruppe in n Dimensionen
V, W	meist Vektorraum, Teil 2: Vektorbündel
$\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}P^2)$	Gruppe der Äquivalenzklassen isomorpher \mathbb{C} -Geradenbündel über $\mathbb{R}P^2$
$[x_0 : \dots : x_n]$	homogene Koordinaten in $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$
\mathbb{Z}_2	multiplikative Gruppe mit zwei Elementen $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$
$\mathbb{Z} \bmod 2$	additive Gruppe mit zwei Elementen $\mathbb{Z} \bmod 2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$; bildet einen Körper; ist als Gruppe aber isomorph zu \mathbb{Z}_2 .

Griechisches Alphabet.

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	meist Elemente eines Körpers, Funktionen
$\bar{\alpha}$	(komplex) konjugiertes Element zu α
$ \alpha $	Betrag der Zahl $\alpha \in \mathbb{K}$
$\Gamma(V)$	Menge der Schnitte über einem Bündel V .
$(\kappa_3)_*$	Differential der Abbildung κ_3 .
ψ	Ortswellenfunktionen
$[\phi, \theta]$	Äquivalenzklasse der Antipoden auf der Sphäre, ausgedrückt durch Azimut- und Polarwinkel.

Relationen und Konjunktionen.

$\langle \cdot \cdot \rangle$	Skalarprodukt auf \mathcal{H}
$A \approx B$	A ist homöomorph zu B
$A \cong B$	A ist isomorph zu B
$A \tilde{\times} B$	verdrehtes Produkt von A und B ; Gesamtraum eines nichttrivialen assoziierten Vektorbündels
$\mathbf{a} \odot \mathbf{b}$	Produkt zwischen Strahlen, auch als Wahrscheinlichkeitsabbildung bezeichnet
$a \vee b$	Gerade, die durch die Punkte a und b festgelegt ist

Literaturverzeichnis

- [AB59] Y. Aharonov und D. Bohm. Significance of Electromagnetic Potential in Quantum Theory. *Phys. Rev.*, 115(3):485–491, 1959.
- [AB95] J. L. Alperin und R. B. Bell. *Groups and Representations*, Band 162 von *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1995.
- [Art47] E. Artin. Theory of braids. *Ann. Math.*, 48:101–126, 1947.
- [Art57] E. Artin. *Geometric Algebra*. Interscience Publ., New York, 1957.
- [Bar64] V. Bargmann. Note on Wigner’s Theorem on Symmetry Operations. *J. Math. Phys.*, 5(7):862–868, 1964.
- [BR97] M. V. Berry und J. M. Robbins. Indistinguishability for quantum particles: spin, statistics and the geometric phase. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 453:1771–1790, 1997.
- [Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*, Band 139 von *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1993.
- [Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of Groups*. Nummer 87 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1982.
- [BS91] Luis J. Boya und E. C. G. Sudarshan. Rays and Phases in Quantum Mechanics. *Foundations of Physics Letters*, 4(3):283–287, 1991.
- [DS67] N. Dunford und J. T. Schwartz. *General Theory*, Band 1 von *Pure and Applied Mathematics - Linear Operators*. Wiley Interscience Publishers, 1967. Hilbertraum.
- [EGH80] Tohuru Eguchi, Peter B. Gilkey und Andrew J. Hanson. Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry. *Physics Reports*, 66(6):213–393, 1980.
- [Emc63] Gérard Emch. Symmetry in Quantum Theory. *J. Math. Phys.*, 4(4):469–473, Apr. 1963.
- [Fis92] Gerd Fischer. *Analytische Geometrie*. Vieweg, Braunschweig, 1992.
- [Hag59] R. Hagedorn. Note On Symmetry Operations in Quantum Mechanics. *Nuovo Cimento*, XII(X):553–566, 1959.
- [Hat03] Allen Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory*. Allen Hatcher, 2003. <http://www.math.cornell.edu/hatcher/>.
- [Ish84] C. J. Isham. Topological and Global Aspects of Quantum Theory. In B. S. DeWitt und R. Stora, Hrsg., *Relativity, groups and topology II*, Les Houches, Session XL, Seiten 1059–1290. Elsevier Science Publishers B.V., 1984.
- [Kle25] Felix Klein. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus II*, Band XV von *Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Springer, 1925.
- [KM05] Bernd Kuckert und Jens Mund. Spin & statistics in nonrelativistic quantum mechanics, II. *Ann. Physics*, 14(5):309–311, 2005.
- [KN63] Shoshichi Kobayashi und Katsumi Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, Band 1. John Wiley & Sons, 1963.
- [Kuc04] Bernd Kuckert. Spin and statistics in nonrelativistic quantum mechanics, I. *Phys. Lett. A*, 322:47–53, 2004.
- [LD71] Michael G. G. Laidlaw und Cécile Morette DeWitt. Feynman Functional Integrals for Systems of Indistinguishable Particles. *Phys. Rev. D*, 3(6):1375–1378, 1971.
- [Lee03] John M Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2003.
- [LM63] J. S. Lomont und P. Mendelson. The Wigner Unitary-Antiunitary Theorem. *Ann. Math.*, 78(3):548–559, 1963.
- [LM77] J.M. Leinaas und J. Myrheim. On the theory of identical particles. *Il Nuovo Cimento*, 37B:1–23, 1977.
- [Noe18] Emmy Noether. Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1918:235–257, 1918.
- [PPRS04] Nikolaos A. Papadopoulos, Mario Paschke, Andrés Reyes und Florian Scheck. The spin-statistics relation in nonrelativistic quantum mechanics and projective modules. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, 11:205–220, 2004.
- [Rey06] Andrés Reyes. *On the Geometry of the Spin-Statistics Connection in Quantum Mechanics*. Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2006.
- [Sch68] Lawrence Schulman. A Path Integral for Spin. *Phys. Rev.*, 5:1558–1569, 1968.
- [Sch01] Dr. Florian Scheck. *Theoretische Physik 4: Quantisierte Felder*. Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 2001.
- [Sou97] J.-M. Souriau. *Structure of Dynamical Systems*. Birkhäuser, 1997.

- [Uhl62] Ulf Uhlhorn. Representation of symmetry transformations in quantum mechanics. *Arkiv för Fysik*, 23(30):307–340, 1962.
- [Wei95a] Charles A. Weibel. *An Introduction to homological algebra*. Nummer 38 in Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 1995.
- [Wei95b] Steven Weinberg. *The Quantum Theory Of Fields*, Band 1. University Of Cambridge, Cambridge, USA, 1995.
- [Wig31] Eugene P. Wigner. *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*. Vieweg, Braunschweig, 1931.

DANKSAGUNG. Ich danke Prof. Dr. Nikolaos Papadopoulos für die Betreuung dieser Arbeit. Insbesondere danke ich ihm für sein vehementes Drängen auf ein fundamentales Verständnis der Dinge. Dieser Ansporn hat die vorliegende Arbeit erst möglich gemacht und mir überdies zu vielen interessanten Einsichten verholfen. Ich danke ihm für seine Unterstützung auch im Hinblick auf die Zusammenarbeit mit Andrés Reyes in Kolumbien und sein immer offenes, höfliches und sehr freundliches Auftreten.

Ich danke ganz besonders Dr. Andrés Reyes, der mir in vielen Fragen und Diskussionen (in Person, am Telefon oder via Internet) stets zur Seite gestanden hat. Von ihm stammen viele Ideen zum zweiten Teil dieser Arbeit. Ich danke ihm natürlich auch für die Einladung nach Bogotá, die Zeit an der Universidad de los Andes, die vielen lehrreichen Diskussionen und Seminare, die gesamte Organisation meines Aufenthaltes und nicht zuletzt auch für die Zeit neben dem universitären Alltag.

Ich danke dem Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD), der mir die Reise nach Kolumbien ermöglicht hat.

Ich danke Prof. Dr. Florian Scheck, Prof. Dr. Tomáš Kopf und Jun.-Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen, die für meine (manchmal auch unausgereiften) Fragen immer ein offenes Ohr hatten.

Ich danke der ganzen Arbeitsgruppe THEP für das angenehme Arbeitsklima und die Hilfe bei den verschiedensten Problemen und Problemchen.

Ich danke Roxana und Christian für ihre Unterstützung - nicht nur bei physikalischen Fragen, sowie der *“Wir gehen jeden Tag - pünktlich um Vier - in die Cafeteria”*-Selbsthilfegruppe. Christian danke ich im Besonderen auch für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Ich danke Michael Bogner dafür, dass er mich bei den einfachsten meiner Fragen nicht ausgelacht hat.

Ich danke meiner Freundin Corinna für ihre moralische Unterstützung während der gesamten Arbeit, aber auch für meine Einsicht, dass wir in der theoretischen Physik garnicht so weit von den Philosophen entfernt sind, wie manche vielleicht glauben. Ihr widme ich die Fußnote 10 auf Seite 20.

Ich mecht mich außerdähm nadierlich noch bei meinere Sibschaft bedange, die hän mir nähmlich des ganze Glumb do mit dem Fisik schdudiere un so ärscht meglich gemacht, des basst jo uff kä Kuhaut un schun gaanät in die Danggsachung do, wofia ich eich alles danggba bin. Entschuldische mecht ich mich bei däre Geleechenheit dodefia, dass ich bei dem ganze rumschdudiere e guud Schdigg fun meim Dialegt fäläant hab - die in Määnz fäschdeen halt kä Pälzisch.

Además quiero decirle gracias a todos los Colombianos que encontré en Bogotá por una hospitalidad grandísima que me ofrecieron. Especialmente quiero decirle gracias a Carlos Benavides y Alexander Cardona, con quienes, además de Andrés Reyes, trabajé en esos dos meses en Colombia; Gracias por las discusiones sobre temas de física y matematica (y los dos juntos), pero tambien por el tiempo libre que compartimos.